Zadania stereometryczne.

Proste do płaszczyzny prostopadłe i pochyłe. Płaszczyzny i proste równoległe.

1. W wierzchołku kąta prostego trójkąta prostokątnego wzniesiono prostopadłą do płaszczyzny tego trójkąta; długość prostopadłej $= h$, górny zaś jej koniec oddalony jest od końców przeciwprostokątnej c f i g. Znaleźć długość przeciwprostokątnej.

2. Z punktu, odległego od płaszczyzny o 3 stopy, poprowadzono do płaszczyzny pochyłą długości 7 st. i 1 cal. Jak wielki jest rzut tej pochyłej na płaszczyznę?

3. a) W środku koła wzniesiona jest prostopadła do jego płaszczyzny. Wyznaczyć odległość górnego końca tego pionu od punktów okręgu, wiedząc, że długość prostopadłej wynosi a, płaszczyzna zaś koła $= Q$.

b) Promień koła $= 4$ m. Poza płaszczyzną koła wzięty jest punkt, odległy od środka koła o 15 m., a od płaszczyzny — o 12 m. Wyznaczyć największą i najmniejszą odległość danego punktu od okręgu.

4. Z punktu, znajdującego się ponad płaszczyzną, poprowadzono do niej dwie pochyłe długości 10 cm. i 17 cm. Rzuty pochyłych na płaszczyznę mają się do siebie, jak 2 : 5. Wyznaczyć odległość punktu od płaszczyzny.

5. Punkt A oddalony jest od płaszczyzny o 5 c. Pochyłe AB i AC mają po 10 cm. długości, rzuty zaś ich na płaszczyznę tworzą kąt równy 120^0. Wyznaczyć odległość BC.

6. a) Punkt O jest środkiem kwadratu o boku a. OA jest pionem do płaszczyzny kwadratu i równa się b. Znaleźć odległość pomiędzy punktem A i wierzchołkami kwadratu.

b) Bok trójkąta równobocznego $= 5$ dm. W jakiej odległości od płaszczyzny znajduje się punkt, oddalony od każdego wierzchołków trójkąta o 2 dm.?

7. W trójkącie równoramiennym podstawa i wysokość [illegible] 4 c. długości. Punkt dany jest oddalony od płaszczyzny trójkąta o 6 c. i znajduje się w równej odległości od wszystkich jego wierzchołków. Znaleźć tę odległość.

8. a) W trójkącie ABC kąt B jest prosty, przyprostokątna $[illegible]C$ równa się a. W wierzchołku A wzniesiono prostopadłą AD do płaszczyzny trójkąta w ten sposób, że odległość pomiędzy punktami D i C równa się f. Wyznaczyć odległość pomiędzy punktem D i przyprostokątną BC.

b) Przyprostokątne trójkąta prostokątnego ABC równają się [illegible] i 20 m. W wierzchołku kąta prostego C wzniesiono pion CD do płaszczyzny trójkąta, równy 35 m. Wyznaczyć odległość punktu D od przeciwprostokątnej AB.

c) Boki trójkąta równają się 10 c., 17 c. i 21 c. W wierzchołku największego z kątów trójkąta wzniesiono pion do jego płaszczyzny długości 15 c. Wyznaczyć odległość górnego końca pionu od największego boku.

9. W trójkącie ABC kąt B jest prosty. BD jest prostopadłą do płaszczyzny tego trójkąta; punkt D połączony jest z punktami A i C. Obliczyć pole trójkąta ADC, mając [illegible] cm., $BC = 2$ cm. i $BD = 1$ cm.

10*. a) Przyprostokątna BC trójkąta ABC, w którym kąt B jest prosty, leży na płaszczyźnie M, wierzchołek [illegible] płaszczyzną. AD jest prostopadła do płaszczyzny M. Pole trójkąta ABC równa się 300 cm.². Czemu się równa pole rzutu trójkąta na płaszczyznę M, jeżeli AD tak się [illegible] 7 : 25?

b) Boki trójkąta ABC równają się: AB — 7 st., [illegible] BC — 9 st. Bok AC leży na płaszczyźnie M, wierzchołek B odległy jest od tej płaszczyzny o 3 stopy. Czemu się równa pole rzutu trójkąta ABC na płaszczyznę M?

11. Punkt, znajdujący się poza płaszczyzną danego [illegible], odległy jest od jego wierzchołka o a, a od każdego [illegible] o b. Jaka jest odległość punktu od płaszczyzny [illegible]go?

12. Na płaszczyźnie M znajdują się dwie proste [illegible] AB i CD, pomiędzy któremi odległość wynosi a. Poza płaszczyzną M znajduje się punkt S, odległy od AB o [illegible] Znaleźć odległość pomiędzy punktem S i płaszczyzną M, wiedząc, że: 1) $a = 66$, $b = c = 65$, 2) $a = 6$, $b =$ [illegible]

13. Z wierzchołka A trójkąta ABC poprowadzona jest poza jego płaszczyzną prosta AD, tworząca z bokami AB i AC jednakowe kąty ostre. Na jakie części rzut prostej AD (na płaszczyznę trójkąta) dzieli bok BC, jeżeli $AB = 51$ m., $AC = 34$ m., $BC = 30$ m.

14. a) A i B są to punkty, znajdujące się ponad płaszczyzną M; AC i BD są prostopadłe do tej płaszczyzny. Wyznaczyć odległość pomiędzy punktami A i B, jeżeli $AC = 3$ m., $BD = 2$ m., $CD = 24$ dm.

b) Końce danego odcinka, którego długość wynosi 125 c., odległe są od płaszczyzny o 100 c. i 56 c. Wyznaczyć długość rzutu tego odcinka.

15. Z punktu A płaszczyzny M wyprowadzona jest pochyła od tej płaszczyzny; na pochyłej znajdują się punkty B i C: $AC = 14$ cm., $AB = 8$ cm. Punkt B oddalony jest od płaszczyzny M o 6 c. Znaleźć odległość pomiędzy punktem C i płaszczyzną M.

16. Końce danego odcinka są oddalone od płaszczyzny o 30 c. i 50 c. Znaleźć odległość pomiędzy płaszczyzną a punktem, który dzieli dany odcinek w stosunku 3 : 7. (Dwa przypadki.)

17. A i B są to punkty na płaszczyźnie M; AC i BD — prostopadłe do tej płaszczyzny. Mając długości: $AC = a$ i $BD = b$, dowieść, że AD i BC muszą się przeciąć, oraz wyznaczyć odległość pomiędzy punktem ich przecięcia a płaszczyzną M.

18. Z punktów A i B, znajdujących się na płaszczyźnie M, wyprowadzono na zewnątrz tej płaszczyzny odcinki równoległe: $AC = 8$ dm. i $BD = 6$ dm. Prosta, przeprowadzona przez punkty C i D, przecina płaszczyznę M (dlaczego?) w punkcie E. Wyznaczyć długość BE, jeżeli $AB = 4$ dm.

19*. AB i CD są to proste równoległe, znajdujące się na dwóch przecinających się płaszczyznach; AE i DF są to prostopadłe do linji przecięcia płaszczyzn. Odległość $AD = 5$ c., i odcinek $EF = 4$ c. Wyznaczyć odległość pomiędzy prostemi AB i CD.

20. Z punktu A, nie leżącego na płaszczyźnie M, przeciągnięto do tej płaszczyzny prostą AB; z punktu C tej prostej, który ją dzieli w stosunku 3 : 4 (licząc od A do B),

wychodzi równoległa CD do płaszczyzny M długości 1 st. Przez punkty A i D przeprowadzono prostą do przecięcia z płaszczyzną w punkcie E. Wyznaczyć odległość pomiędzy punktami B i E.

21. BDC jest to odcinek, równoległy do płaszczyzny M. ABE, ADF i ACG — proste, poprowadzone do płaszczyzny M z punktu A, leżącego na zewnątrz tej płaszczyzny. AF jest prostopadła do BC. Wyznaczyć odległość pomiędzy punktami E i G, mając: $BC = a$, $AD = b$ i $DF = c$.

22. Podstawa AD trapezu $ABCD$ leży na płaszczyźnie M, druga zaś podstawa BC jest odległa od pierwszej o 5 c. Znaleźć odległość pomiędzy płaszczyzną M a punktem przecięcia przekątnych tego trapezu, wiedząc, że AD tak się ma do BC, jak 7 : 3.

23. Wierzchołki A i D równoległoboku $ABCD$ leżą na płaszczyźnie M, a wierzchołki B i C — poza nią. Bok $AD =$ = 10 cm., bok $AB = 15$ cm. Rzuty przekątnych AC i BD na płaszczyznę M równają się odpowiednio 13,5 cm. i 10,5 cm. Znaleźć długości przekątnych.

24. AB i CD są to dwie proste równoległe, znajdujące się na płaszczyźnie M w odległości 28 m. jedna od drugiej; EF jest to prosta, równoległa do AB i odległa od AB o 17 m., a od płaszczyzny M o 15 m. Wyznaczyć odległość pomiędzy EF i CD.

25*. Z końców odcinka AB, równoległego do płaszczyzny M, wyprowadzone są do niej pion AC i pochyła BD, prostopadła do AB. Wyznaczyć odległość CD, wiedząc, że $AB = a$, $AC = b$ i $BD = c$.

26*. AB jest to odcinek równoległy do płaszczyzny M; AC i BD są dwie równe pochyłe do płaszczyzny M, poprowadzone prostopadle do odcinka AB, lecz w kierunkach różnych. Wyznaczyć odległość CD, jeżeli odcinek $AB = 2$ c. i jest oddalony od płaszczyzny M o 7 c., proste zaś AC i BD mają po 8 c. długości.

27. a) Płaszczyzny M i P są do siebie równoległe. Z punktów A i D płaszczyzny M wyprowadzono do płaszczyzny P dwie pochyłe: $AC = 37$ m. i $BD = 125$ m. Rzut odcinka AC na jedną z płaszczyzn równa się 12 m. Czemu się równa rzut odcinka BD?

b) Odcinki dwóch prostych, znajdujące się pomiędzy dwiema płaszczyznami równoległemi, równają się 51 c. i 53 c., rzuty zaś ich na jedną z tych płaszczyzn mają się do siebie, jak 6 : 7. Wyznaczyć odległość pomiędzy płaszczyznami.

28. a) W przestrzeni są dane dwa kąty proste; odpowiednie ich ramiona są do siebie równoległe, jednakowo skierowane i prostopadłe do prostej, łączącej ich wierzchołki. Długość tej prostej jest a. Na ramieniu jednego z kątów odmierzony jest od wierzchołka odcinek długości b, na nierównoległem zaś do niego ramieniu drugiego kąta — odcinek długości c. Wyznaczyć odległość pomiędzy końcami tych odcinków.

b) W zadaniu poprzedniem zamienić kąty proste na kąty po 60^0 oraz nadać wartości zgłoskom: $a = 24$, $b = 5$, $c = 8$.

29. Wierzchołki trójkąta równobocznego o boku a znajdują się ponad płaszczyzną M w jednakowej od niej odległości d. Ze środka trójkąta wystawiono pion do jego płaszczyzny, równy h. Z końca tego pionu poprowadzono proste przez wierzchołki trójkąta do przecięcia z płaszczyzną M. Obliczyć odcinki tych prostych, zawarte pomiędzy wierzchołkami trójkąta a płaszczyzną M, oraz odległości pomiędzy końcami dolnemi tych odcinków.

Kąt prostej z płaszczyzną.
Kąty dwuścienne i bryłowe.

30. Dana jest pochyła długości a. Czemu się równa rzut tej pochyłej, jeżeli kąt, utworzony przez nią i płaszczyznę, wynosi: 1) 45^0, 2) 60^0, 3) 30^0?

31. Punkt dany znajduje się w odległości h od płaszczyzny. Wyznaczyć długości pochyłych, wyprowadzonych z tego punktu do płaszczyzny i tworzących z nią kąty: 1) 30^0, 2) 45^0, 3) 60^0, 4) 18^0.

32. Odcinek dany, równoległy do płaszczyzny, równa się a. Prosta, łącząca jeden koniec tego odcinka z rzutem drugiego, tworzy z płaszczyzną kąt 60^0. Znaleźć długość tej prostej.

33. a) Z punktu, oddalonego od płaszczyzny o a, wyprowadzone są do tej płaszczyzny dwie pochyłe, tworzące z nią kąty po 45^0; kąt zaś, pomiędzy pochyłemi zawarty, wynosi 60^0. Wyznaczyć odległość pomiędzy końcami pochyłych.

b) Z punktu, oddalonego od płaszczyzny o a, wyprowadzone są do tej płaszczyzny dwie pochyłe, tworzące z nią kąty 45^0 i 30^0 i nawzajem prostopadłe. Wyznaczyć odległość końcami pochyłych.

34. Z punktu, odległego od płaszczyzny o a, wyprowadzone są do tej płaszczyzny dwie pochyłe, tworzące z nią kąty po 30^0; rzuty ich tworzą kąt, równy 120^0. Wyznaczyć odległość pomiędzy końcami pochyłych.

35. Na płaszczyźnie M leży prosta AB. Z punktu B wyprowadzono proste BC i BD, prostopadłe do AB, tworzące z płaszczyzną M kąty 50^0 i 15^0. Wyznaczyć kąt CBD.

36. Dwie płaszczyzny równoległe przecinają dwie linje proste; jedna z prostych tworzy z płaszczyzną kąt 45^0, druga zaś 15^0. Mniejszy z odcinków wewnętrznych $= a$. Znaleźć długość większego odcinka.

37. Dowieść, że o ile w trójkącie prostokątnym równoramiennym jedna z przyprostokątnych znajduje się na płaszczyźnie M, a druga tworzy z nią kąt 45, to przeciwprostokątna tworzy z płaszczyzną kąt 30^0.

38*. Dowieść, że o ile pochyła AB tworzy z płaszczyzną M kąt 45^0, prosta zaś AC, znajdująca się na płaszczyźnie M, tworzy z rzutem pochyłej AB kąt 45^0, to kąt BAC równa się 60^0.

39. Prosta AB, znajdująca się na płaszczyźnie M, równa się a; AC i BD są to proste, nie leżące na płaszczyźnie M i równe każda b. AC jest prostopadła do płaszczyzny M, BD zaś, będąc prostopadła do AB, tworzy z płaszczyzną M kąt 30^0. Wyznaczyć odległość CD.

---

40. Na jednej ze ścian kąta dwuściennego znajdują się dwa punkty, odległe od krawędzi o 51 cm. i 34 cm. Odległość pomiędzy pierwszym punktem a drugą ścianą wynosi 15 cm. Wyznaczyć odległość drugiego punktu od tejże ściany.

41. Dowieść, że o ile trójkąt prostokątny równoramienny ABC przegiąć wzdłuż wysokości BD w ten sposób, żeby płaszczyzny ABD i CBD utworzyły kąt dwuścienny prosty, to DA i DC utworzą kąt prosty, zaś BA i BC — kąt 60^0.

42. Wyznaczyć wielkość kąta dwuściennego, jeżeli odległość pomiędzy punktem, znajdującym się na jednej ze ścian, a krawędzią jest dwa razy większa od odległości pomiędzy tym punktem a drugą ścianą.

43. a) Z punktu, znajdującego się wewnątrz kąta dwuściennego, wyprowadzony jest pion do krawędzi tego kąta; ze ścianami pion ten tworzy kąty $38^0\ 24'$ i $71^0\ 36'$. Wyznaczyć wielkość kąta dwuściennego.

b) Punkt wewnątrz kąta dwuściennego, zawierającego 60^0, oddalony jest od każdej ściany o a. Wyznaczyć odległość tego punktu od krawędzi.

44*. a) Na krawędzi kąta dwuściennego prostego znajdują się dwa punkty A i B; do krawędzi tej wystawiono prostopadłe AC i BD, każda w płaszczyźnie innej ściany. Wyznaczyć odległość CD, jeżeli $AB = 6$ dm., $AC = 3$ dm. i $BD = 2$ dm.

b) W zadaniu poprzedniem kąt dwuścienny prosty zamienić przez kąt 120^0 oraz przyjąć: 1) $AB = AC = BD = a$, 2) $AB = 3$, $AC = 2$, $BD = 1$.

45. Przyprostokątna AC trójkąta ABC, mającego kąt prosty przy wierzchołku C, leży na płaszczyźnie M; trójkąt ABC tworzy z płaszczyzną M kąt dwuścienny 45^0. Wyznaczyć odległość wierzchołka B od płaszczyzny M, wiedząc, że: $AC = 2$ m., zaś $AB : BC = 3 : 1$.

46. Dwa trójkąty równoramienne mają podstawę wspólną, kąt zaś, utworzony przez ich płaszczyzny, równa się 60^0. Długość wspólnej podstawy wynosi 16 c.; każde z ramion pierwszego trójkąta ma 17 c. długości, ramiona zaś drugiego trójkąta są do siebie prostopadłe. Znaleźć odległość pomiędzy wierzchołkami trójkątów.

47. a) Przyprostokątne trójkąta prostokątnego równają się 7 c. i 2 st. Znaleźć odległość pomiędzy wierzchołkiem kąta prostego a płaszczyzną, przesuniętą przez przeciwprostokątną trójkąta pod kątem 30^0 do jego płaszczyzny.

b) Boki trójkąta ABC są: $AB = 9$, $BC = 6$, $AC = 5$. Przez bok AC przechodzi płaszczyzna M, tworząca z płaszczyzną trójkąta kąt 45^0. Wyznaczyć odległość pomiędzy płaszczyzną M a wierzchołkiem B.

48. Prosta AB, równoległa do płaszczyzny M, jest odległa od niej o a; przez AB przesunięta jest płaszczyzna P, tworząca z płaszczyzną M kąt 45^0; na płaszczyźnie P przeprowadzona jest linja prosta, przecinająca się z AB pod kątem 45^0. Wyznaczyć odcinek tej prostej, zawarty pomiędzy AB a płaszczyzną M.

49. AB jest linją przecięcia dwóch prostopadłych do siebie płaszczyzn M i P; CD — prostą, na płaszczyźnie M położoną równolegle do AB i w odległości 60 m. od niej; E — punktem na płaszczyźnie P, oddalonym o 91 m. od AB. Wyznaczyć odległość E od CD.

50. a) Prosta AB łączy punkty A i B, znajdujące się na dwóch prostopadłych do siebie płaszczyznach. Z punktów A i B poprowadzono prostopadłe do linji przecięcia płaszczyzn, równające się a i b; odległość pomiędzy końcami prostopadłych wynosi c. Wyznaczyć długość linji AB oraz długości jej rzutów na wyżej oznaczone płaszczyzny.

b) Prosta, której końce leżą na dwóch prostopadłych do siebie płaszczyznach, tworzy z jedną z tych płaszczyzn kąt 45^0, a z drugą kąt 30^0; długość tej prostej jest a. Znaleźć długość

odcinka linji przecięcia płaszczyzn, zawartego pomiędzy rzutami końców danej prostej na tę linję.

51. Dwie linje równoległe AB i CD znajdują się na dwóch przecinających się pod kątem 60^0 płaszczyznach. Punkt A jest odległy od linji przecięcia płaszczyzn o 8 c., punkt D zaś o 6,3 c. Znaleźć odległość pomiędzy AB i CD.

52*. Dwa równe i jednakowo położone trójkąty ABC i ADC mają wspólną podstawę AC i tworzą kąt dwuścienny. Wyznaczyć odległość pomiędzy wierzchołkiem jednego z trójkątów a płaszczyzną drugiego, jeżeli: $AC = 44$, $AB = AD = 39$, $BC = CD = 17$ i $BD = 18$.

53. a) Rozstrzygnąć, czy możliwem jest, aby kąt trójścienny posiadał kąty płaskie następującej wielkości: 1) 130^0, 85^0 i 36^0; 2) 100^0, 70^0 i 40^0; 3) 160^0, 130^0 i 80^0; 4) 82^0, 56^0 i 26^0; 5) 150^0, 120^0 i 90^0.

b) Rozstrzygnąć, czy możliwem jest, aby kąt wypukły czworościenny miał kąty płaskie następującej wielkości: 1) 40^0, 70^0, 100^0, 150^0; 2) 30^0, 159^0, 40^0, 70^0; 3) 130^0, 50^0, 30^0, 70^0.

54. Z punktu, znajdującego się poza płaszczyzną, wyprowadzone są do niej dwie pochyłe. Pierwsza tworzy z płaszczyzną kąt 70^0, druga kąt 15^0. Wyznaczyć wielkość kąta, zawartego pomiędzy pochyłemi.

55. W kącie trójściennym $SABC$ mamy: $\angle BSC = 90^0$; $\angle ASB = \angle ASC = 60^0$, krawędź $SA = a$. Należy: 1) Znaleźć odległość pomiędzy punktem A i płaszczyzną BSC; 2) dowieść, że krawędź SA tworzy z płaszczyzną BSC kąt 45^0.

***56.** Dowieść, że w kącie trójściennym, w którym jeden z kątów płaskich jest prosty, pozostałe zaś mają po 60^0, płaszczyzna, odcinająca od krawędzi tego kąta trzy jednakowe odcinki, jest prostopadła do płaszczyzny płaskiego kąta prostego.

Równoległościany i graniastosłupy.

Uwaga. W zadaniach, zamieszczonych poniżej, termin: „płaszczyzna“ przekątna oznacza przecięcie, utworzone przez płaszczyznę sieczną, przeprowadzoną przez krawędź boczną i przekątną podstawy.

57. a) Mając krawędź a sześcianu, obliczyć przekątną tego sześcianu, oraz pole jego płaszczyzny przekątnej.

b) Przekątna sześcianu jest większa od przekątnej jego ściany o m. Wyznaczyć długość krawędzi sześcianu.

58. Znaleźć odległość pomiędzy wierzchołkiem sześcianu a jego przekątną, mając krawędź sześcianu równą a.

59. Mając długość a krawędzi sześcianu, obliczyć pole płaszczyzny siecznej, przeprowadzonej przez końce trzech krawędzi, wychodzących z wierzchołka wspólnego.

60. a) Wyznaczyć wysokość prostopadłościanu, jeżeli przekątna jego tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 45^0, a boki jego podstawy równają się 120 c. i 209 c.

b) Długość przekątnej prostopadłościanu wynosi 25 m., wysokość równa się 9 m., oraz pole podstawy — 240 m.². Znaleźć długości boków podstawy.

61. Znaleźć przekątną prostopadłościanu, mając jego trzy wymiary: 1) 1, 2, 2; 2) 2, 3, 6; 3) 6, 6, 7; 4) 8, 9, 12; 5) 12, 16, 21.

62. Znaleźć przekątną prostopadłościanu, wiedząc, że przekątne trzech ścian różnych równają się l, m i n.

63. a) Znaleźć długości przekątnych prostopadłościanu, wiedząc, że jego krawędź boczna równa się 5 m., boki podstawy 6 m. i 8 m., długość zaś jednej z przekątnych podstawy wynosi 12 m.

b) W zadaniu poprzedniem zamiast liczb danych wziąć liczby: 9 c., 7 c. i 14 c.

64. W równoległościanie prostym jeden z boków podstawy ma 3 c., a drugi 5 c. długości, długość zaś jednej z przekątnych podstawy wynosi 4 c. Mniejsza z przekątnych równoległościanu tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 60^0. Znaleźć przekątne równoległościanu.

65. W równoległościanie prostym boki podstawy równają się 2 cm. i 5 cm. Odległość pomiędzy mniejszemi jej bokami równa się 4 cm.; długość zaś krawędzi bocznej wynosi $\sqrt{8}$ cm. Znaleźć przekątne równoległościanu.

66. Znaleźć przekątne równoległościanu prostego, którego każda z krawędzi równa się a, a kąt podstawy $= 60^0$.

67. a) W równoległościanie prostym boki podstawy tworzą kąt 60^0 i równają się 3 c. i 4 c.; krawędź boczna jest średnią proporcjonalną pomiędzy bokami podstawy. Znaleźć przekątne równoległościanu.

b) W równoległościanie prostym krawędzie, wychodzące z wierzchołka wspólnego, mają następujące długości: 1 m., 2 m., 3 m., dwie krawędzie mniejsze tworzą kąt 60^0. Znaleźć przekątne tego równoległościanu.

68. a) W prostopadłościanie boki podstawy równają się 7 dm. i 24 dm., wysokość zaś równoległościanu równa się 8 dm. Obliczyć pole płaszczyzny przekątnej.

b) W prostopadłościanie krawędź boczna $= 5$ c., płaszczyzna przekątna $= 205$ c.² i pole podstawy $= 360$ c.². Znaleźć boki podstawy.

69. W równoległościanie prostym krawędź boczna równa się 1 m., boki podstawy równają się 23 dm. i 11 dm., przekątne zaś podstawy mają się do siebie, jak 2 : 3. Obliczyć pola płaszczyzn przekątnych.

70. W równoległościanie prostym boki podstawy równają się 17 c. i 28 c., długość zaś jednej z przekątnych podstawy wynosi 25 c. Suma pól płaszczyzn przekątnych ma się do pola podstawy, jak 16 : 15. Obliczyć pola płaszczyzn przekątnych.

71. W prostopadłościanie o podstawie $ABCD$ krawędź boczna równa się 56 dm., boki podstawy AB i AD równają się 33 dm. i 4 m. Obliczyć pole płaszczyzny przecięcia, przechodzącego przez krawędzie AD i B_1C_1.

72*. W równoległościanie prostym o podstawie $ABCD$ $AB = 29$ c., $AD = 36$ c., $BD = 25$ c. i krawędź boczna równa się 48 c. Obliczyć pole płaszczyzny przecięcia AB_1C_1D.

73. W równoległościanie prostym kąt ostry podstawy zawiera n^0, a długość jednego z jej boków wynosi a. Pole

płaszczyzny przecięcia, przeprowadzonej przez wyżej wspomniany bok i krawędź, leżącą naprzeciwko tego boku, równa się Q i tworzy z płaszczyzną podstawy kąt, równy $(90 - n)^0$. Znaleźć drugi bok podstawy.

74. Krawędzie prostopadłościanu mają 3 c., 4 c. i 7 c. długości. Obliczyć pole płaszczyzny przecięcia, przeprowadzonej przez końce trzech krawędzi, wychodzących z wierzchołka wspólnego.

75. W sześcianie $ABCDA_1B_1C_1D_1$ połączone są kolejno środki krawędzi AA_1, A_1B_1, B_1C_1, C_1C, CD, AD i AA_1. Dowieść, że otrzymana figura jest sześciokątem foremnym, oraz obliczyć jej pole, mając długość a krawędzi sześcianu.

76. Dowieść, że w każdym równoległościanie suma kwadratów przekątnych równa jest sumie kwadratów wszystkich krawędzi.

77. Podstawą równoległościanu pochyłego jest romb $ABCD$, którego kąt BAD równa się 60^0; krawędzie boczne są pochylone do płaszczyzny podstawy pod kątem 60^0, oraz płaszczyzna AA_1C_1C jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Dowieść, że pola przecięć BB_1D_1D i AA_1C_1C mają się do siebie, jak 2 : 3.

78. a) W graniastosłupie czworokątnym foremnym pole podstawy = 1 st.^{2}, wysokość = 14 c. Znaleźć przekątną tego graniastosłupa.

b) Znaleźć przakątną graniastosłupa czworokątnego foremnego, mając przekątną podstawy równą 8 cm., oraz przekątną ściany bocznej równą 7 cm.

79. Dowieść, że w graniastosłupie czworokątnym foremnym $ABCDA_1B_1C_1D_1$, w którym przekątne B_1D i D_1B są do siebie prostopadłe, przekątne A_1C i B_1D tworzą kąt 60^0.

80. W kwadracie przeciągnięto przekątną, a następnie powyginano go na podobieństwo powierzchni bocznej graniastosłupa czworokątnego foremnego. Z przekątnej utworzyła się przytem linja łamana (niepłaska). Wyznaczyć kąt pomiędzy przyległemi odcinkami tej łamanej.

81. W graniastosłupie czworokątnym foremnym powierzchnia ściany bocznej = Q. Obliczyć pole płaszczyzny przekątnej.

82. Podstawą graniastosłupa jest sześciokąt foremny o boku a; ściany boczne tego graniastosłupa są kwadratami. Znaleźć przekątne graniastosłupa, oraz pola jego płaszczyzn przekątnych.

83. W graniastosłupie trójkątnym foremnym o krawędzi bocznej równej a przesunięto płaszczyznę przez bok podstawy i środek przeciwległej krawędzi bocznej. Obliczyć pole otrzymanego przecięcia.

84. Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt równoramienny, w którym każde z ramion ma po 7 c., a podstawa 2 c. długości. Graniastosłup ten przecięto płaszczyzną, przesuniętą przez najmniejszy bok podstawy pod kątem 30^0 do jej płaszczyzny. Obliczyć pole otrzymanego przecięcia oraz odcinek krawędzi bocznej, którą przecina płaszczyzna sieczna.

85. W graniastosłupie trójkątnym prostym przez jeden z boków podstawy przesunięta jest płaszczyzna, przecinająca przeciwległą krawędź boczną i tworząca z płaszczyzną podstawy kąt 45^0. Obliczyć pole otrzymanego przecięcia, mając pole podstawy Q.

86. Mając bok a podstawy i krawędź boczną b graniastosłupa trójkątnego foremnego, obliczyć pole płaszczyzny przecięcia, przechodzącej przez krawędź boczną i oś graniastosłupa.

87. W graniastosłupie trójkątnym prostym boki podstawy równają się 10 c., 17 c. i 21 c., wysokość zaś graniastosłupa wynosi 18 c. Obliczyć pole płaszczyzny przecięcia, przeprowadzonej przez krawędź boczną, i najmniejszą z wysokości podstawy.

88. Wewnątrz graniastosłupa sześciokątnego foremnego, którego ściany są kwadratami, przesunięto płaszczyznę przez bok podstawy dolnej i przeciwległy do tego boku bok podstawy górnej. Obliczyć pole otrzymanego przecięcia, mając bok a podstawy.

89. W trójkątnym graniastosłupie pochyłym jeden z kątów dwuściennych, utworzonych przez ściany boczne, równa się $20^0 43' 28''$, a drugi $= 105^0 27' 32''$. Wyznaczyć wielkość trzeciego kąta.

90. W trójkątnym graniastosłupie pochyłym odległości pomiędzy krawędziami bocznemi są następujące: 37 dm., 13 dm., 40 dm. Znaleźć odległość pomiędzy największą ze ścian bocznych a przeciwległą do tej ściany krawędzią boczną.

---

91. 1) Znaleźć krawędź sześcianu, mając jego powierzchnię: 1) 5046 m.^{2}; 2) $793\frac{1}{2}$ m.^{2}; 3) 47 m.^{2}?

2) Obliczyć powierzchnię sześcianu: 1) Mając jego przekątną l; 2) mając pole Q płaszczyzny przekątnej.

92. a) Obliczyć powierzchnię prostopadłościanu, mając trzy jego wymiary: 10 c., 22 c. i 16 c.

b) Znaleźć krawędzie prostopadłościanu, wiedząc, że ich stosunek równy jest stosunkowi 3 : 7 : 8, powierzchnia zaś prostopadłościanu równa się 808 m.^{2}?

93. W prostopadłościanie boki podstawy mają się do siebie, jak 7 : 24, pole zaś płaszczyzny przekątnej równa się 50 m.^{2}. Obliczyć powierzchnię boczną prostopadłościanu.

94. Obliczyć powierzchnię boczną prostopadłościanu, mając jego wysokość h, pole podstawy Q i pole płaszczyzny przekątnej M.

95. W równoległościanie prostym boki podstawy równają się 6 c. i 8 st. i tworzą kąt 30^0, krawędź boczna ma 5 st. długości. Obliczyć powierzchnię całkowitą równoległościanu.

96. W równoległościanie prostym boki podstawy równają się 10 c. i 17 c. Jedna z przekątnych podstawy ma 21 c. długości, większa zaś z przekątnych równoległościanu równa się 29 c. Znaleźć powierzchnię całkowitą równoległościanu.

97. W równoległościanie prostym boki podstawy mają 3 c. i 8 c. długości; kąt, przez nie utworzony, ma 60^0. Powierzchnia boczna równoległościanu równa się 220 c.^{2}. Obliczyć powierzchnię całkowitą równoległościanu oraz pole jego mniejszej płaszczyzny przekątnej.

98. Podstawą równoległościanu prostego jest romb o przekątnych, równych 6 c. i 8 c. Przekątna ściany bocznej równa się 13 c. Obliczyć powierzchnię całkowitą równoległościanu.

99. Znaleźć powierzchnię boczną równoległościanu prostego, którego podstawą jest romb, pola zaś płaszczyzn przekątnych równają się M i N.

100. Mając bok podstawy a i krawędź boczną b, obliczyć powierzchnię całkowitą graniastosłupa foremnego: 1) trójkątnego, 2) czworokątnego, 3) sześciokątnego.

101. Obliczyć powierzchnię całkowitą foremnego graniastosłupa czworokątnego, mając jego przekątną, równą 14 c., oraz przekątną ściany bocznej, równą 10 c.

102*. Przekątna graniastosłupa czworokątnego foremnego ma 9 c. długości, powierzchnia zaś jego całkowita wynosi 1 st.^{2}. Znaleźć bok podstawy i krawędź boczną.

103. a) Obliczyć powierzchnię całkowitą graniastosłupa trójkątnego prostego, mając jego wysokość, równą 50 st., i trzy boki podstawy, równe 40 st., 13 st. i 37 st.

b) W graniastosłupie trójkątnym prostym długości boków podstawy są następujące: 25 dm., 29 dm. i 36 dm.; powierzchnia całkowita graniastosłupa = 1620 dm.^{2}. Obliczyć powierzchnię boczną oraz wysokość graniastosłupa.

104*. W graniastosłupie trójkątnym prostym boki podstawy stosują się do siebie, jak 17 : 10 : 9; krawędź boczna = 16 c. Powierzchnia całkowita = 10 st.^{2}. Znaleźć boki podstawy.

105. Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt równoramienny, w którym jedno ramię ma się do podstawy, jak 5 : 6. Wysokość graniastosłupa równa się wysokości bocznej trójkąta, całkowita zaś powierzchnia równa się 2520 dm.^{2}. Znaleźć krawędzie graniastosłupa.

106. Podstawą graniastosłupa prostego jest trapez równoramienny $ABCD$, w którym $AB = CD = 13$ cm., $BC = 11$ cm. i $AD = 21$ cm. Pole płaszczyzny przekątnej graniastosłupa = 180 cm.^{2}. Obliczyć powierzchnię całkowitą graniastosłupa oraz pole przecięcia AB_1C_1D.

107. Podstawą graniastosłupa prostego jest 10-kąt foremny, wpisany w koło o promieniu r. Krawędź boczna graniastosłupa równa się przekątnej podstawy, łączącej pierwszy jej wierzchołek z 4-ym. Obliczyć powierzchnię boczną graniastosłupa.

108. a) W graniastosłupie czworokątnym pochyłym krawędź boczna równa się 8 c., a odległości pomiędzy kolejno następującemi po sobie krawędziami bocznemi równają się: 3 c., 6 c., 2 c. i 7 c. Obliczyć powierzchnię boczną graniastosłupa.

b) W graniastosłupie trójkątnym pochyłym dwie ściany boczne są do siebie prostopadłe; krawędź wspólna tych ścian ma 24 cale długości i jest odległa od dwóch innych krawędzi o 12 c. i 35 c. Obliczyć powierzchnię boczną graniastosłupa.

109. a) W graniastosłupie trójkątnym pochyłym odległości pomiędzy krawędziami bocznemi są następujące: 37 cm., 15 cm.

i 26 cm., powierzchnia zaś boczna równoważna jest polu przecięcia prostopadłego. Znaleźć krawędź boczną graniastosłupa.

b) W graniastosłupie trójkątnym pochyłym krawędzie boczne mają po 8 c. długości; boki przecięcia prostopadłego stosują się do siebie, jak 9 : 10 : 17, pole zaś jego równa się 1 st.². Znaleźć powierzchnię boczną graniastosłupa.

110. a) Podstawą równoległościanu jest kwadrat; jeden z wierzchołków podstawy górnej znajduje się w jednakowej odległości od wszystkich wierzchołków podstawy dolnej. Bok podstawy $= a$; krawędź boczna $= b$. Znaleźć powierzchnię całkowitą równoległościanu.

b) W wyżej wspomnianym równoległościanie obliczyć przekątne oraz pola płaszczyzn przekątnych.

111. Podstawą graniastosłupa pochyłego jest trójkąt foremny o boku a. Krawędź boczna $= b$; jedna z krawędzi bocznych tworzy z przyległemi do niej bokami podstawy kąty po 45^0. Obliczyć powierzchnię boczną graniastosłupa.

112. Podstawą graniastosłupa pochyłego jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $AB = AC = 10$ dm. oraz $BC = 12$ dm. Wierzchołek A_1 jest w równej odległości od wierzchołków A, B i C, a krawędź $AA_1 = 13$ dm. Obliczyć powierzchnię całkowitą graniastosłupa.

---

113. a) Ile wynosi krawędź sześcianu, którego objętość równa się 3375 st.³? 21952 st.³?

b) 3 sześciany dane mają krawędzie, równe 3 cm., 4 cm. i 5 cm. Znaleźć krawędź sześcianu, którego objętość jest równa sumie objętości sześcianów danych.

114. Obliczyć objętość sześcianu: 1) mając jego przekątną l; 2) mając jego powierzchnię S.

115. a) Powiększając długość krawędzi sześcianu o 2 c., zwiększamy objętość tego sześcianu o 98 c.³. Znaleźć długość krawędzi.

b) Powiększając długość krawędzi sześcianu o 1 m., zwiększamy jego objętość 125 razy. Znaleźć długość krawędzi.

116. a) Wymiary prostopadłościanu są następujące: 15 dm. 50 dm. i 36 dm. Znaleźć krawędź sześcianu równoważnego.

b) Wymiary prostopadłościanu są następujące: 2 cm., 3 cm. i 6 cm. Znaleźć krawędź sześcianu takiego, iżby stosunek objętości tych ciał był równy stosunkowi ich powierzchni.

117. a) Znaleźć objętość prostopadłościanu, mając jego przekątną, równą 35 c., oraz stosunek wzajemny krawędzi 2 : 3 : 6.

b) Znaleźć objętość prostopadłościanu, wiedząc, że boki podstawy mają się do siebie, jak $m : n$, płaszczyzna zaś przekątna jest kwadratem, którego pole równa się Q.

118. Znaleźć objętość prostopadłościanu, mając pola jego 3-ch ścian: L, M i N.

119. Znaleźć objętość prostopadłościanu, mając przekątne jego ścian, równe 5 cm., 11 cm. i 12 cm.

120. Wysokość prostopadłościanu wynosi 12 c., przekątna jego ma 17 c. długości, a objętość równa się $\frac{1}{2}$ st.³. Znaleźć boki podstawy.

121. Wysokość prostopadłościanu równa się 9 c., jego powierzchnia wynosi $6\frac{1}{6}$ st.², a objętość $= 1$ st.³. Obliczyć długości boków podstawy.

122. Znaleźć objętość prostopadłościanu, mając jego przekątną l, tworzącą z jedną ze ścian kąt 30^0, z drugą zaś kąt 45^0.

123. W równoległościanie prostym boki podstawy są a i b i tworzą kąt 30^0. Powierzchnia boczna równoległościanu równa się P. Znaleźć objętość równoległościanu.

124. a) Podstawą równoległościanu prostego jest równoległobok, w którym jedna z przekątnych równa się 17 c., a boki mają 9 c. i 10 c. długości. Powierzchnia całkowita równoległościanu równa się 334 c.². Znaleźć objętość równoległościanu.

b) W równoległościanie prostym boki podstawy równają się 13 dm. i 37 dm., większa zaś przekątna podstawy ma 40 dm. długości. Krawędź boczna ma się do większej przekątnej równoległościanu, jak 15 : 17. Znaleźć objętość równoległościanu.

125. W równoległościanie prostym boki podstawy równają się $\sqrt{8}$ cm. i 5 cm. i tworzą kąt 45^0; mniejsza przekątna równoległościanu ma 7 cm. długości. Znaleźć objętość równoległościanu.

126. W równoległościanie prostym boki podstawy równają się 8 dm. i 15 dm. i tworzą kąt 60^0. Mniejsza przekątna ró-

wnoległościanu tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 30^0. Znaleźć objętość równoległościanu.

127. Podstawą równoległościanu prostego jest romb o polu równem Q; pola płaszczyzn przekątnych równają się M i N. Znaleźć objętość równoległościanu.

128. Podstawą równoległościanu jest romb. Płaszczyzny przekątne tego równoległościanu są prostopadłe do płaszczyzny podstawy; pola tych płaszczyzn równają się 100 c.^{2} i 105 c.^{2}, linja zaś ich przecięcia ma 10 c. długości. Znaleźć objętość i powierzchnię boczną równoległościanu.

129. Podstawą równoległościanu prostego jest równoległobok, którego boki mają 3 cm. i 5 cm. długości i tworzą kąt 60^0. Większa płaszczyzna przekątna równoległościanu = 63 cm.^{2}. Znaleźć mniejszą przekątną tego równoległościanu, jego powierzchnię boczną oraz objętość.

130. W równoległościanie prostym o podstawie $ABCD$ krawędź AB równa się 50 c., prostopadła B_1E, spuszczona z wierzchołka B_1 na krawędź AD, ma 41 c. długości i dzieli AD na odcinki: $AE = 30$ c. i $ED = 18$ c. Znaleźć objętość równoległościanu.

131. Mając bok podstawy a i krawędź boczną b, znaleźć objętość foremnego graniastosłupa: 1) trójkątnego, 2) czworokątnego, 3) sześciokątnego.

132. a) Znaleźć objętość graniastosłupa czworokątnego foremnego, mając jego przekątną, równą $3\frac{1}{2}$ dm., oraz przekątną ściany bocznej, równą $2\frac{1}{2}$ dm.

b) Znaleźć objętość graniastosłupa czworokątnego foremnego, mając jego przekątną, równą 6 cm., oraz powierzchnię boczną, równą 32 cm.^{2}.

133. a) Znaleźć objętość graniastosłupa trójkątnego foremnego, mając bok jego podstawy, równy a, oraz powierzchnię boczną, równoważną sumie podstaw.

b) Krawędź boczna graniastosłupa trójkątnego foremnego równa się wysokości jego podstawy, pole zaś płaszczyzny przecięcia, przeprowadzonej przez wysokość podstawy i krawędź boczną, równa się Q. Znaleźć objętość graniastosłupa.

134. Podstawą graniastosłupa jest trójkąt równoboczny, wpisany w koło o promieniu r; ściany boczne graniastosłupa są kwadratami. Znaleźć objętość graniastosłupa.

135. W graniastosłupie sześciokątnym foremnym większa płaszczyzna przekątna jest równoważna podstawie o boku, równym a. Znaleźć krawędź sześcianu równoważnego temu graniastosłupowi.

136. Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt prostokątny, w którym przyprostokątne mają się do siebie, jak 24 : 27; przeciwprostokątna podstawy ma się do wysokości graniastosłupa, jak 5 : 2, boczna zaś powierzchnia równa się 140 dm.^{2}. Znaleźć objętość graniastosłupa.

137. a) W graniastosłupie trójkątnym prostym boki podstawy mają następujące długości: 4 c., 5 c. i 7 c.; krawędź boczna graniastosłupa równa jest największej z wysokości podstawy. Znaleźć objętość graniastosłupa.

b) Wysokość graniastosłupa trójkątnego prostego równa się 5 m., objętość jego wynosi 24 m.^{3}, pola zaś ścian bocznych mają się do siebie, jak 17 : 17 : 16. Znaleźć boki podstawy graniastosłupa.

138. Pole podstawy graniastosłupa trójkątnego prostego równa się 4 c.^{2}, a pola ścian bocznych wynoszą: 9 c.^{2}, 10 c.^{2}, 17 c.^{2}. Znaleźć objętość graniastosłupa.

139. Podstawą graniastosłupa prostego jest trapez $ABCD$, w którym jeden z boków równoległych AD równa się 39 cm., drugi $BC = 22$ cm., boki zaś nierównoległe AB i CD mają 26 cm. i 25 cm. długości. Pole przecięcia $AA_1C_1C = 400$ cm.^{2}. Znaleźć objętość graniastosłupa.

140. Łuk $ACDB$ jest połową okręgu o promieniu r; punkt C jest środkiem tego łuku, punkt D jest środkiem łuku CB. Znaleźć objętość graniastosłupa prostego, którego podstawą jest trójkąt ABD, krawędź boczna zaś równa się cięciwie AC.

141. Promień podstawy graniastosłupa ośmiokątnego foremnego równa się r, a jego krawędź boczna jest równa najmniejszej przekątnej podstawy. Znaleźć objętość graniastosłupa.

142. Bok podstawy graniastosłupa ośmiokątnego foremnego równa się a, najmniejsza zaś przekątna graniastosłupa jest dwa razy większa od boku podstawy. Znaleźć objętość graniastosłupa.

143. Najmniejsza przekątna graniastosłupa dwunastokątnego foremnego o promieniu podstawy r równa się drugiej (co do wielkości) przekątnej podstawy. Znaleźć objętość graniastosłupa.

144*. Krawędź boczna graniastosłupa dwunastokątnego foremnego równa się średniej (co do wielkości) przekątnej podstawy. Pole podstawy $= Q$. Znaleźć objętość graniastosłupa.

145. a) Znaleźć objętość graniastosłupa dziesięciokątnego foremnego, mając promień r jego podstawy, oraz wiedząc, że krawędź boczna równa jest apotemie podstawy.

b) Znaleźć objętość graniastosłupa pięciokątnego foremnego, mając promień r jego podstawy, oraz wiedząc, że krawędź boczna jest równa bokowi podstawy.

146. Znaleźć objętość równoległościanu pochyłego, w którym boki podstawy równają się a i b, kąt zaś ostry, pomiędzy niemi zawarty, oraz kąt, utworzony przez krawędź boczną c i płaszczyznę podstawy, równe są odpowiednio: 1) 60^0 i 45^0, 2) 45^0 i 60^0, 3) 30^0 i 45^0, 4) 45^0 i 45^0.

147. Podstawą równoległościanu pochyłego jest równoległobok $ABCD$, w którym $AB = 3$ dm., $AD = 7$ dm. i $BD = 6$ dm. Płaszczyzna przekątna AA_1C_1C jest prostopadła do płaszczyzny podstawy i równa się 1 m.². Znaleźć objętość równoległościanu.

148. Podstawą równoległościanu pochyłego jest kwadrat; jedna z krawędzi bocznych równoległościanu tworzy z przyległemi do niej bokami podstawy równe kąty ostre. Bok podstawy $= a$; krawędź boczna $= b$. Odległość pomiędzy odpowiedniemi bokami podstaw $= c$. Znaleźć objętość równoległościanu ($a = 15$, $b = 14$, $c = 10$).

149*. Znaleźć objętość równoległościanu, którego ścianami są jednakowe romby o boku a i o kącie ostrym, równym 60^0.

150*. Podstawą równoległościanu pochyłego jest prostokąt o bokach a i b; krawędź boczna równoległościanu równa się c i tworzy z bokami podstawy kąty po 60^0. Znaleźć objętość równoległościanu, jego powierzchnię boczną oraz kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy.

151. Podstawą równoległościanu pochyłego jest romb $ABCD$ o boku a i ostrym kącie, równym 60^0. Krawędź $AA_1 = a$ i tworzy z krawędziami AB i AD kąty po 45^0. Znaleźć objętość równoległościanu.

152. Pola dwóch ścian równoległościanu równają się P i Q; wspólna ich krawędź równa się a, kąt zaś dwuścienny, przez nie utworzony, zawiera 30^0. Znaleźć objętość równoległościanu.

153. Podstawą graniastosłupa jest trójkąt o bokach, równych 2 dm., 3 dm. i 3 dm.; krawędź boczna równa się 4 dm. i tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 45^0. Znaleźć krawędź sześcianu równoważnego.

154. a) Podstawą graniastosłupa jest trójkąt, w którym boki równają się 3 c., 5 c. i 7 c. Krawędź boczna graniastosłupa równa się 8 c. i tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 60^0. Znaleźć objętość graniastosłupa.

b) W graniastosłupie trójkątnym pochyłym boki podstawy równają się 5 m., 6 m. i 9 m., krawędź boczna graniastosłupa równa się 10 m. i tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 45^0. Znaleźć objętość graniastosłupa.

155. Podstawą graniastosłupa jest trójkąt równoboczny ABC o boku a; rzut wierzchołka A_1 na płaszczyznę podstawy dolnej znajduje się w jej środku, krawędź zaś AA_1 tworzy z bokiem podstawy kąt 45^0. Znaleźć objętość i powierzchnię boczną graniastosłupa.

156. Podstawą graniastosłupa pochyłego jest trójkąt równoboczny o boku a; jedna ze ścian bocznych, prostopadła do płaszczyzny podstawy, jest rombem, w którym mniejsza przekątna $= c$. Znaleźć objętość graniastosłupa.

157. a) Krawędzie boczne graniastosłupa pochyłego trójkątnego mają po 15 m. długości, odległości zaś pomiędzy niemi są następujące: 26 m., 25 m. i 17 m. Znaleźć objętość graniastosłupa.

b) W graniastosłupie trójkątnym odległości pomiędzy krawędziami bocznemi mają się do siebie, jak $9 : 10 : 17$, krawędź boczna równa się 1 st., powierzchnia boczna $= 6$ st.². Znaleźć objętość tego graniastosłupa.

158. Podstawą graniastosłupa pochyłego jest czworobok $ABCD$, w którym przekątne są do siebie prostopadłe; płaszczyzna przekątna AA_1C_1C jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Znaleźć objętość graniastosłupa, mając przekątną $BD = 16$ dm. oraz pole $AA_1C_1C = 250$ dm.².

Ostrosłup.

159. a) Znaleźć krawędź boczną ostrosłupa czworokątnego foremnego, jeżeli jego wysokość równa się 7 cm., a długość boku podstawy wynosi 8 cm.

b) Znaleźć krawędź boczną ostrosłupa trójkątnego foremnego, jeżeli jego wysokość równa się 1 c., a długość boku podstawy wynosi 1 st.

160. Mając bok a podstawy i krawędź boczną b, znaleźć wysokość ostrosłupa foremnego: 1) trójkątnego, 2) czworokątnego, 3) sześciokątnego.

161. Mając bok a podstawy i wysokość h, znaleźć apotemę ostrosłupa foremnego: 1) trójkątnego, 2) czworokątnego, 3) sześciokątnego.

162. Podstawą ostrosłupa jest równoległobok, którego boki mają 3 dm. i 7 dm. długości, jedna zaś z przekątnych = 6 dm.; wysokość ostrosłupa przechodzi przez punkt przecięcia przekątnych podstawy i równa się 4 dm. Obliczyć krawędzie boczne ostrosłupa.

163. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoramienny. Podstawa tego trójkąta = 6 cm., wysokość zaś jego = 9 cm.; krawędzie boczne są jednakowe i mają po 13 cm. długości. Znaleźć wysokość tego ostrosłupa.

164. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoramienny; podstawa trójkąta = 1 st., a każde z ramion ma 10 c. długości. Ściany boczne tworzą z płaszczyzną podstawy jednakowe kąty dwuścienne po 45°. Znaleźć wysokość ostrosłupa.

165. a) Dowieść, że w ostrosłupie trójkątnym foremnym, w którym wysokość równa jest bokowi podstawy, krawędzie boczne tworzą z płaszczyzną podstawy kąty po 60°.

b) Dowieść, że w ostrosłupie czworokątnym foremnym, w którym każdy z kątów płaskich przy wierzchołku ostrosłupa równy jest 60°, krawędzie boczne przeciwległe są do siebie prostopadłe.

166. Znaleźć kąt dwuścienny przy podstawie w ostrosłupie n-kątnym foremnym, którego wysokość jest dwa razy mniejsza od boku podstawy.

167. W ostrosłupie czworokątnym foremnym bok podstawy ma 14 c. długości, krawędź zaś boczna równa się 10 c. Znaleźć pole płaszczyzny przekątnej.

168. W ostrosłupie sześciokątnym foremnym wysokość równa się h, bok zaś podstawy ma długość a. Obliczyć pola płaszczyzn przekątnych.

169. Mając bok a podstawy i krawędź boczną b ostrosłupa trójkątnego foremnego, obliczyć pole płaszczyzny przecięcia, przeprowadzonej przez krawędź boczną, i wysokość ostrosłupa.

170. Mając apotemę g ostrosłupa czworokątnego foremnego i pole Q płaszczyzny przekątnej, znaleźć bok podstawy (a) i wysokość ostrosłupa (h) $[g = 5,\ Q = \sqrt{2}]$.

171. Wysokość ostrosłupa podzielona jest na n równych części i przez punkty podziału przeprowadzone są płaszczyzny równoległe do podstawy. Wyznaczyć wielkości otrzymanych przecięć, wiedząc, że pole podstawy równa się 400 jednostkom kwadratowym, zaś n = 1) 4, 2) 5.

172. Płaszczyzna sieczna, równoległa do podstawy ostrosłupa, dzieli jego wysokość w stosunku 3 : 4 (licząc od wierzchołka do podstawy); pole przecięcia jest o 200 st.² mniejsze od pola podstawy. Obliczyć pole podstawy.

173. a) Wysokość ostrosłupa równa się 16 m., pole podstawy wynosi 512 m.². W jakiej odległości od podstawy znajduje się przecięcie równoległe, którego pole równa się 50 m.².

b) W ostrosłupie pole podstawy równa się 150 c.²; pole przecięcia równoległego = 54 c.²; odległość pomiędzy obu temi płaszczyznami wynosi 14 c. Znaleźć wysokość ostrosłupa.

174. W ostrosłupie czworokątnym foremnym przeprowadzona jest płaszczyzna przez przekątną podstawy równolegle do krawędzi bocznej. Znaleźć pole otrzymanego przecięcia, jeżeli bok podstawy = a, krawędź zaś boczna = b.

175. Bok podstawy ostrosłupa trójkątnego foremnego $SABC$ ma długość a, krawędź zaś boczna = b. W ostrosłupie tym przeprowadzona jest płaszczyzna przez środki krawędzi AB i BC równolegle do krawędzi SB. Obliczyć pole otrzymanego przecięcia.

176. W ostrosłupie trójkątnym foremnym przez bok podstawy przeprowadzona jest płaszczyzna prostopadła do przeciwległej krawędzi bocznej [1]). Znaleźć pole otrzymanego przecięcia, wiedząc, że bok podstawy ma długość a, wysokość zaś ostrosłupa $= h$.

177. W ostrosłupie czworokątnym foremnym przez bok podstawy przeprowadzona jest płaszczyzna prostopadle do przeciwległej krawędzi bocznej. Obliczyć pole otrzymanego przecięcia, jeżeli bok podstawy ma 30 c. długości, wysokość zaś ostrosłupa $= 20$ c.

178. W ostrosłup czworokątny foremny wpisany jest sześcian w ten sposób, że cztery jego wierzchołki znajdują się na krawędziach bocznych ostrosłupa, pozostałe zaś cztery na płaszczyźnie jego podstawy. Znaleźć krawędź sześcianu, jeżeli bok podstawy ostrosłupa $= a$, wysokość zaś jego $= h$.

179. W czworościan foremny wpisany jest graniastosłup trójkątny foremny o krawędziach równych w ten sposób, że górne jego wierzchołki znajdują się na krawędziach bocznych czworościanu, dolne zaś na płaszczyźnie jego podstawy. Znaleźć krawędź graniastosłupa, mając krawędź czworościanu a.

180. W ośmiościan foremny wpisany jest sześcian w ten sposób, że wierzchołki jego znajdują się na krawędziach ośmiościanu. Znaleźć krawędź sześcianu, mając krawędź ośmiościanu, równą a.

---

181. Mając bok a podstawy i wysokość h, obliczyć powierzchnię całkowitą ostrosłupa foremnego: 1) trójkątnego, 2) czworokątnego, 3) sześciokątnego.

182. Obliczyć powierzchnię boczną ostrosłupa trójkątnego foremnego, mając jego wysokość, równą 4 c., i apotemę, równą 8 calom.

183. Obliczyć powierzchnię całkowitą ostrosłupa sześciokątnego foremnego, mając jego apotemę g i apotemę podstawy k.

184. Bok podstawy ostrosłupa trójkątnego foremnego równa się a, jego powierzchnia boczna jest dwa razy większa od pola podstawy. Znaleźć wysokość ostrosłupa.

[1]) Dowieść możliwości tego rodzaju konstrukcji.

185. Powierzchnia boczna ostrosłupa czworokątnego foremnego równa się 14,76 m.^{2}, całkowita zaś jego powierzchnia wynosi 18 m.^{2}. Znaleźć bok podstawy i wysokość ostrosłupa.

186. a) Bok podstawy ostrosłupa czworokątnego foremnego ma długość a; kąt dwuścienny przy podstawie równa się 60^0. Znaleźć powierzchnię boczną ostrosłupa.

b) Znaleźć powierzchnie boczne foremnego trójkątnego i foremnego sześciokątnego ostrosłupa, mając bok podstawy każdego a i kąt dwuścienny przy podstawie w każdym, równy 30^0.

187. Bok podstawy ostrosłupa trójkątnego foremnego równa się a, krawędź boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 45^0. Znaleźć powierzchnię boczną ostrosłupa.

188. Mając bok podstawy a, obliczyć powierzchnię boczną ostrosłupa czworokątnego foremnego, w którym płaszczyzna przekątna równoważna jest polu podstawy.

189. Mając wysokość h i powierzchnię boczną P ostrosłupa czworokątnego foremnego, znaleźć bok jego podstawy.

190*. a) Znaleźć bok podstawy i apotemę ostrosłupa trójkątnego foremnego, w którym krawędź boczna i powierzchnia boczna wynoszą odpowiednio: 1) 10 c. i 1 st.^{2}; 2) 25 m. i 504 m.^{2}.

b) Krawędź boczna ostrosłupa foremnego równa się b, a pole jego ściany bocznej $= Q$. Znaleźć bok podstawy, wiedząc, że liczba ścian w ostrosłupie jest większą od trzech.

191. Krawędź boczna czworokątnego ostrosłupa foremnego ma 5 c. długości, całkowita jego powierzchnia $= 16$ c.^{2}. Znaleźć bok podstawy.

192. Bok podstawy ostrosłupa sześciokątnego foremnego równa się a, a pole ściany bocznej równe jest polu płaszczyzny przekątnej, przeprowadzonej przez średnicę podstawy. Znaleźć powierzchnię boczną ostrosłupa.

193. Promień podstawy ostrosłupa dziesięciokątnego foremnego $= r$, jego wysokość jest większą od promienia podstawy o połowę boku podstawy. Obliczyć powierzchnię boczną ostrosłupa.

194. W sześcian wpisany jest ostrosłup w ten sposób, że środek podstawy górnej i środki boków podstawy dolnej sze-

ścianu są wierzchołkami ostrosłupa. Znaleźć jego powierzchnię boczną, mając krawędź sześcianu a.

195. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoramienny; podstawa tego trójkąta równa się 40 c., każde zaś z ramion ma 25 c. długości. Wysokość ostrosłupa przechodzi przez wierzchołek kąta, utworzonego przez dwa równe boki trójkąta, i równa się 8 c. Obliczyć powierzchnię boczną ostrosłupa.

196. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt, którego boki równają się 13 c., 14 c. i 15 c. Krawędź boczna ostrosłupa, przeciwległa do średniego (co do wielkości) boku podstawy, jest prostopadła do płaszczyzny podstawy i ma 16 c. długości. Obliczyć powierzchnię całkowitą ostrosłupa.

197. Podstawą ostrosłupa $SABC$ jest trójkąt prostokątny ABC, w którym przeciwprostokątna $AB = 26$ cm. i przyprostokątna $AC = 24$ cm. Krawędź SA jest prostopadła do płaszczyzny ABC i równa się 18 cm. Znaleźć powierzchnię boczną ostrosłupa.

198. Podstawą ostrosłupa jest kwadrat. Wysokość ostrosłupa przechodzi przez jeden z wierzchołków podstawy i równa się 21 dm. Obliczyć powierzchnię boczną ostrosłupa, mając bok podstawy, równy 20 dm.

199. Podstawą ostrosłupa jest sześciokąt foremny o boku a; jedna z krawędzi bocznych ostrosłupa jest prostopadła do płaszczyzny podstawy i równa się bokowi podstawy. Obliczyć powierzchnię boczną ostrosłupa.

200. Podstawą ostrosłupa jest romb, w którym przekątne równają się 6 m. i 8 m.; wysokość ostrosłupa przechodzi przez punkt, w którym się przecinają przekątne podstawy, i równa się 1 m. Obliczyć powierzchnię całkowitą ostrosłupa.

201. Podstawą ostrosłupa jest równoległobok, w którym boki mają 20 c. i 36 c. długości, pole zaś podstawy równa się 360 c.^{2}; wysokość ostrosłupa przechodzi przez punkt, w którym się przecinają przekątne równoległoboku, i równa się 1 st. Obliczyć powierzchnię boczną ostrosłupa.

202. Podstawą ostrosłupa jest równoległobok, którego boki równają się 5 dm. i 4 dm., jedna zaś z przekątnych ma 3 dm. długości; wysokość ostrosłupa przechodzi przez punkt, w którym się przecinają przekątne równoległoboku, i równa się 2 dm. Obliczyć powierzchnię całkowitą ostrosłupa.

203. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoboczny o boku a; jedna ze ścian bocznych ostrosłupa jest także trójkątem równobocznym i jest prostopadłą do płaszczyzny podstawy. Obliczyć powierzchnię boczną ostrosłupa.

---

204. Mając bok podstawy a i krawędź boczną b, znaleźć objętość ostrosłupa foremnego: 1) trójkątnego, 2) czworokątnego, 3) sześciokątnego.

205. a) Apotema ostrosłupa trójkątnego foremnego równa się g, wysokość $= h$. Znaleźć objętość ostrosłupa.

b) Znaleźć objętość ostrosłupa czworokątnego foremnego, mając pole jego podstawy Q oraz jego powierzchnię boczną P ($Q = 12$, $P = 24$).

206. Bok podstawy ostrosłupa trójkątnego foremnego równa się a, a jego krawędzie boczne są do siebie prostopadłe. Znaleźć objętość ostrosłupa.

207. Mając krawędź a czworościanu foremnego, znaleźć jego powierzchnię i objętość.

208. Mając krawędź a ośmiościanu foremnego, znaleźć jego powierzchnię i objętość.

209. a) Środki krawędzi sześcianu są wierzchołkami wpisanego w ten sześcian ośmiościanu foremnego. Znaleźć stosunek objętości tych brył.

b) Środki ścian ośmiościanu foremnego są wierzchołkami wpisanego weń sześcianu. Znaleźć stosunek objętości tych brył.

210. a) Bok podstawy ostrosłupa trójkątnego foremnego równa się a, krawędź boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 45^0. Znaleźć objętość ostrosłupa.

b) Wysokość ostrosłupa trójkątnego foremnego równa się h; ściana boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 60^0. Znaleźć objętość ostrosłupa.

211. a) Bok podstawy ostrosłupa sześciokątnego foremnego równa się a, kąt zaś dwuścienny przy podstawie wynosi 45^0. Znaleźć objętość ostrosłupa.

b) W ostrosłupie sześciokątnym foremnym, którego objętość równa się V, krawędź boczna jest dwa razy większa od

boku podstawy. Znaleźć bok podstawy i wielkość kąta, utworzonego przez krawędź boczną i płaszczyznę podstawy.

c) Krawędź boczna ostrosłupa sześciokątnego foremnego równa się b; kąt, utworzony przez przeciwległe krawędzie boczne, równa się kątowi, utworzonemu przez boki przyległe podstawy. Znaleźć objętość ostrosłupa.

212. W ostrosłupie ośmiokątnym foremnym krawędź boczna jest trzy razy większa od promienia podstawy; objętość ostrosłupa równa się V. Znaleźć promień podstawy.

213. Podstawą ostrosłupa jest dwunastokąt foremny, wpisany w koło o promieniu r; krawędzie boczne ostrosłupa tworzą z płaszczyzną podstawy kąty po 45°. Znaleźć objętość ostrosłupa.

214. Sześcianowi o krawędzi a ścięto wierzchołki zapomocą płaszczyzn, przeprowadzonych przez środki każdych trzech krawędzi, zbiegających się w jednym wierzchołku. Obliczyć objętość i powierzchnię otrzymanej bryły graniastej.

215*. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt, w którym boki mają 6 cm. i 15 cm. długości: wysokość ostrosłupa przechodzi przez punkt, w którym się przecinają przekątne podstawy; boczna zaś powierzchnia ostrosłupa wynosi 126 cm.². Znaleźć objętość ostrosłupa.

216. a) Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoramienny, w którym każde z ramion = 6 dm., a podstawa ma 8 dm. długości. Krawędzie boczne są jednakowe i każda z nich ma 9 dm. długości. Znaleźć objętość ostrosłupa.

b) W zadaniu poprzedniem zamiast liczb danych wziąć kolejno liczby następujące: 10 dm., 1·2 m., 16¼ dm.

217. a) Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoramienny, w którym każde z ramion równa się 39 m., a podstawa ma 30 m. długości. Kąty dwuścienne przy podstawie są jednakowe i każdy z nich zawiera 45°. Znaleźć objętość ostrosłupa.

b) Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoramienny, w którym każde z ramion równa się 7 c., a podstawa ma 6 c. długości; wierzchołek ostrosłupa jest oddalony od każdego z boków podstawy o jednakową odległość, która ma się do wysokości ostrosłupa, jak 5 : 4. Znaleźć objętość ostrosłupa.

218. Podstawą ostrosłupa $SABC$ jest trójkąt ABC, w którym bok $AB = 15$ c., $BC = 27$ c. i $AC = 18$ c. Ściany SAB

i SAC są prostopadłe do płaszczyzny ABC, ściana zaś SBC tworzy z nią kąt 45°. Znaleźć objętość ostrosłupa i pole ściany BSC.

219. a) Podstawą ostrosłupa jest romb, w którym przekątne równają się 14 cm. i 20 cm., przeciwległe krawędzie boczne są równe, przyległe zaś różnią się o 1 cm. Znaleźć objętość ostrosłupa.

b) Podstawą ostrosłupa jest równoległobok, w którym boki przyległe mają 9 m. i 10 m. długości; jedna z przekątnych równa się 11 m. Przeciwległe krawędzie boczne są równe, każda zaś z krawędzi większych równa sie 10,5 m. Znaleźć objętość ostrosłupa.

220. Podstawą ostrosłupa jest trapez równoramienny, w którym boki równoległe równają się 3 cm. i 5 cm., każde zaś z ramion ma 7 cm. długości. Wysokość ostrosłupa przechodzi przez punkt, w którym się przecinają przekątne podstawy; większa z krawędzi bocznych równa się 10 cm. Znaleźć objętość ostrosłupa.

221. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt, w którym kąt pomiędzy przekątnemi zawiera 60°, a pole wynosi Q; krawędzie boczne tworzą z płaszczyzną podstawy kąty po 45°. Znaleźć objętość ostrosłupa.

222*. a) W ostrosłupie trójkątnym jeden z boków podstawy równa się 16 c., przeciwległa do niego krawędź boczna ma 18 c. długości, a każda z pozostałych czterech krawędzi ma długości 17 c. Znaleźć objętość ostrosłupa.

b) Znaleźć objętość ostrosłupa trójkątnego, w którym dwie krawędzie przeciwległe równają się 4 c. i 12 c., pozostałe zaś mają po 7 c. długości.

223. W ostrosłupie trójkątnym $SABC$ jest $SA = 30$ m., $SB = SC = 65$ m., $BC = 120$ m., $AB = AC = 61$ m. Znaleźć objętość ostrosłupa.

224. Sześcian o krawędzi a ma ścięte wierzchołki w ten sposób, że z każdej jego ściany utworzył się ośmiokąt foremny. Znaleźć objętość otrzymanego wielościanu.

225. a) Krawędź boczna ostrosłupa czworokątnego foremnego równa się b, kąt płaski przy wierzchołku ostrosłupa ma 45°. Znaleźć objętość i powierzchnię całkowitą ostrosłupa.

b) W zadaniu poprzedniem zamiast kąta 45° wziąć kąt 30°.

226. Bok podstawy ostrosłupa 10-ciokątnego foremnego równa się a, kąt dwuścienny przy podstawie ostrosłupa zawiera 18°. Znaleźć objętość i powierzchnię boczną ostrosłupa.

227. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt, którego boki mają następujące długości: 39 dm., 17 dm. i 28 dm.; krawędzie boczne są jednakowe i każda z nich równa się 22,9 dm. Znaleźć objętość ostrosłupa.

228. W ostrosłupie trójkątnym kąty dwuścienne przy podstawie są równe; boki podstawy mają 7 cm., 8 cm. i 9 cm. długości; objętość ostrosłupa równa się 40 cm.³. Znaleźć powierzchnię boczną ostrosłupa.

229. W ostrosłupie trójkątnym $SABC$ krawędź boczna SA jest prostopadła do płaszczyzny podstawy ABC. Przez wierzchołek S przeprowadzona jest płaszczyzna równolegle do krawędzi BC, dzieląca objętość ostrosłupa na połowy. Znaleźć pole otrzymanego przecięcia, mając: $SA = 6$ cm., $BC = 8$ cm. i pole $ABC = 12$ cm.².

230. a) Jaką część objętości ostrosłupa odcina przecięcie środkowe [1])?

b) Wysokość ostrosłupa $= h$. W jakiej odległości od wierzchołka ostrosłupa znajduje się przecięcie równoległe, dzielące objętość ostrosłupa na dwie części równoważne.

231. a) Wysokość ostrosłupa jest podzielona na 5 jednakowych odcinków przez płaszczyzny równoległe do podstawy. W jakim stosunku podzieloną została objętość ostrosłupa?

b) Ostrosłup jest podzielony na trzy części równoważne przez płaszczyzny równoległe do podstawy. W jakim stosunku podzieloną została wysokość ostrosłupa?

232. Pole przecięcia równoległego równa się 0,36 pola podstawy ostrosłupa. W jakim stosunku przecięcie to dzieli objętość ostrosłupa?

233. Środki ścian czworościanu foremnego są wierzchołkami innego czworościanu foremnego. Znaleźć stosunek wzajemny ich powierzchni i objętości.

[1]) T. j. przecięcie, przechodzące przez środek wysokości, równolegle do podstawy.

234. W ostrosłupie, którego wysokość równa się H, przeprowadzone są dwa przecięcia równoległe do podstawy; odległość pomiędzy niemi jest równa połowie wysokości ostrosłupa, objętość zaś części ostrosłupa, zawartej pomiędzy niemi, równa się połowie objętości ostrosłupa. Znaleźć odległość pomiędzy wierzchołkiem ostrosłupa a płaszczyzną przecięcia górnego.

Ostrosłup ścięty. Graniastosłup ścięty.

235. W ostrosłupie foremnym ściętym krawędź boczna $= c$, boki zaś podstawy dolnej i górnej wynoszą odpowiednio a i b. Znaleźć wysokość tego ostrosłupa, gdy jest on 1) trójkątnym, 2) czworokątnym, 3) sześciokątnym.

236. W ostrosłupie foremnym czworokątnym ściętym wysokość $= 63$ c., apotema $= 65$ c., a boki podstaw mają się do siebie, jak 7 : 3. Znaleźć boki podstaw.

237. W ostrosłupie foremnym czworokątnym ściętym wysokość $= 2$ dm., a boki podstaw mają 3 dm. i 5 dm. długości. Znaleźć przekątną ostrosłupa.

238. Znaleźć boki podstaw czworokątnego foremnego ostrosłupa ściętego, mając jego wysokość równą 7 cm., krawędź boczną $= 9$ cm. i przekątną $= 11$ cm.

239. Przekątne ostrosłupa foremnego czworokątnego ściętego są prostopadłe do krawędzi bocznych. Bok podstawy dolnej $= 9$ cm., krawędź boczna ma 8 cm. długości. Znaleźć bok podstawy górnej, wysokość ostrosłupa i odległość pomiędzy punktem przecięcia przekątnych ostrosłupa a płaszczyzną podstawy dolnej.

240. W ostrosłupie foremnym i trójkątnym ściętym boki podstawy mają się do siebie, jak $m : n$; apotema ostrosłupa $= g$. Ściana boczna tworzy z płaszczyzną podstawy dolnej kąt 30°. Znaleźć boki podstawy.

241. W ostrosłupie foremnym czworokątnym ściętym pola podstaw równają się B i b, krawędź zaś boczna ostrosłupa tworzy z płaszczyzną podstawy dolnej kąt 45°. Znaleźć pole płaszczyzny przekątnej.

242. W ostrosłupie trójkątnym foremnym ściętym boki podstaw są równe a i b, a krawędź boczna tworzy z płaszczyzną

podstawy kąt 45°. Obliczyć pole przecięcia, przechodzącego przez krawędź boczną i oś ostrosłupa.

243. W ostrosłupie foremnym trójkątnym ściętym boki podstaw równają się 8 m. i 5 m., a wysokość ma 3 m. długości. Przez bok podstawy dolnej i przeciwległy do niego wierzchołek podstawy górnej przeprowadzono płaszczyznę sieczną. Obliczyć pole przecięcia i kąt dwuścienny, utworzony przez płaszczyznę przecięcia i płaszczyznę podstawy dolnej.

244. W ostrosłupie foremnym czworokątnym ściętym boki podstaw równają się 6 c. i 8 c., krawędź boczna ma 10 c. długości. Obliczyć pole płaszczyzny przecięcia, przeprowadzonej przez koniec przekątnej podstawy górnej prostopadle do tej przekątnej.

245. Odpowiednie boki podstaw ostrosłupa ściętego mają się do siebie, jak 13 : 17, obwód zaś przecięcia środkowego [1]) równa się 45 st. Obliczyć obwody podstaw.

246*. Dowieść, że jeżeli w ostrosłupie ściętym pola podstaw równają się B i b, a pole przecięcia środkowego M, to

$$\sqrt{M} = \frac{\sqrt{B} + \sqrt{b}}{2}.$$

247*. Pola podstaw ostrosłupa ściętego równają się 20 cm.^{2} i 45 cm.^{2}. Obliczyć pole przecięcia środkowego.

248. Pola podstaw ostrosłupa ściętego równają się 2 m.^{2} i 98 m.^{2}. Obliczyć pole przecięcia równoległego, przeprowadzonego przez środek wysokości, oraz wyznaczyć położenie przecięcia równoległego, którego pole jest średnią arytmetyczną pomiędzy polami podstaw.

249. Wysokość ostrosłupa ściętego równa się h, a pola podstaw wynoszą B i b. W jakiej odległości od podstawy górnej znajduje się równoległe do niej przecięcie, którego pole jest średnią proporcjonalną pomiędzy polami podstaw?

250*. Podstawy ostrosłupa ściętego równają się 18 st.^{2} i 128 st.^{2}. Znaleźć pole przecięcia równoległego, dzielącego wysokość w stosunku 2 : 3 (licząc od podstawy mniejszej).

---

[1]) T. j. przeprowadzonego równolegle do podstaw przez środek wysokości.

251*. Wysokość ostrosłupa ściętego podzielona jest na trzy odcinki jednakowe i przez punkty podziału przeprowadzone są płaszczyzny, równoległe do podstaw. Znaleźć pola otrzymanych przecięć, mając pola podstaw B i b ($B = 32$, $b = 2$).

---

252. Obliczyć powierzchnię całkowitą ostrosłupa foremnego ściętego: 1) trójkątnego, 2) czworokątnego, 3) sześciokątnego, jeżeli wysokość równa się h, a boki podstaw równają się a i b.

253. Znaleźć wysokość ostrosłupa foremnego czworokątnego ściętego, jeżeli boki jego podstaw równają się a i b, a powierzchnia boczna jest równoważna sumie podstaw.

254. a) W ostrosłupie czworokątnym foremnym ściętym apotema = 1 st., krawędź boczna = 13 c., oraz powierzchnia boczna = 5 st.^{2}. Znaleźć boki podstaw.

b) Wysokość ostrosłupa czworokątnego foremnego ściętego = 12 wersz.; różnica boków podstaw wynosi 10 wersz., powierzchnia całkowita zawiera 2 arsz.^{2}. Znaleźć boki podstaw.

255. Kąt dwuścienny przy podstawie dolnej w ostrosłupie trójkątnym foremnym ściętym ma 60°, bok podstawy dolnej = a, całkowita zaś powierzchnia ostrosłupa = S. Znaleźć bok podstawy górnej.

256. W ostrosłupie foremnym czworokątnym ściętym pola podstaw równają się B i b, powierzchnia zaś boczna wynosi P. Obliczyć pole płaszczyzny przekątnej.

257. Podstawami ostrosłupa ściętego są trójkąty równoboczne o bokach a i b. Jedna z krawędzi bocznych, równa c, jest prostopadłą do płaszczyzny podstawy. Obliczyć powierzchnię boczną ostrosłupa ($a = 5$, $b = 3$, $c = 1$).

258. Podstawami ostrosłupa ściętego są prostokąty. Punkty przecięcia ich przekątnych leżą na prostej prostopadłej do płaszczyzny podstawy. Boki pierwszego prostokąta równają się 54 c. i 30 c. Obwód drugiego prostokąta wynosi 112 c. Odległość pomiędzy płaszczyznami prostokątów równa się 12 c. Znaleźć powierzchnię boczną tego ostrosłupa.

259. W ostrosłupie foremnym czworokątnym ściętym zbudowany jest ostrosłup wewnętrzny, którego podstawą jest kwadrat górny, a wierzchołkiem środek kwadratu dolnego. Boki

kwadratów są: $a = 4$ i $b = 3$. Znaleźć wysokość wspólną obu ostrosłupów, jeżeli ich powierzchnie boczne są równoważne. Należy wskazać także warunek, przy którym zadanie jest możliwe.

260. W ostrosłupie ściętym odpowiednie boki podstaw mają się do siebie, jak 3 : 11. W jakim stosunku przecięcie środkowe dzieli powierzchnię boczną ostrosłupa?

---

261. Pola podstaw ostrosłupa ściętego równają się B i b, a wysokość $= h$. Znaleźć objętość ostrosłupa całego oraz objętość jego odcinka górnego.

262. Pola podstaw ostrosłupa ściętego równają się B i b, a objętość wynosi V. Znaleźć objętość ostrosłupa całego.

263. Znaleźć objętość ostrosłupa ściętego, wiedząc, że pola podstaw równają się 245 m.^{2} i 80 m.^{2}, a wysokość całego ostrosłupa wynosi 35 m.

264. a) Znaleźć wysokość ostrosłupa ściętego: 1) jeżeli jego objętość $=$ 310 c.^{3}, a pola podstaw wynoszą 32 c.^{2} i 98 c.^{2}, 2) jeżeli jego objętość $=$ 13 m.^{3}, a pola podstaw wynoszą 2 m.^{2} i 5 m.^{2}.

b) Wysokość ostrosłupa ściętego $=$ 15 m., a jego objętość wynosi 475 m.^{3}; pola podstaw mają się do siebie, jak 4 : 9. Obliczyć pola podstaw.

c) Objętość ostrosłupa foremnego czworokątnego ściętego $=$ 430 dm.^{3}, wysokość $=$ 10 dm., bok jednej z podstaw ma 8 dm. długości. Znaleźć bok drugiej podstawy.

265. a) Objętość ostrosłupa ściętego $=$ 76 m.^{3}; wysokość $=$ 6 m.; pole jednej podstawy $=$ 18 m.^{2}. Obliczyć pole drugiej podstawy.

b) Znaleźć pola podstaw ostrosłupa ściętego, jeżeli ich różnica wynosi 6 c.^{2}, wysokość $=$ 9 c., a objętość $=$ 42 c.^{3}.

266. Objętość ostrosłupa ściętego $=$ 1720 m.^{3}, wysokość $=$ 20 m.; odpowiednie boki podstaw mają się do siebie, jak 5 : 8. Znaleźć pola podstaw.

267. W ostrosłupie trójkątnym ściętym wysokość $=$ 10 cm., boki jednej podstawy równają się 27 cm., 29 cm. i 52 cm. Obwód drugiej podstawy ma 72 cm. długości. Znaleźć objętość ostrosłupa.

268. Mając krawędź boczną l oraz boki podstaw a i b, znaleźć objętość ostrosłupa foremnego ściętego: 1) trójkątnego, 2) czworokątnego, 3) sześciokątnego.

269. a) Apotema i boki podstaw ostrosłupa foremnego czworokątnego ściętego mają się do siebie, jak 5 : 8 : 2, objętość zaś jego $= 1^3/_4$ m.^{3}. Znaleźć powierzchnię całkowitą ostrosłupa.

b) Znaleźć objętość ostrosłupa foremnego trójkątnego ściętego, wiedząc, że boki podstaw równają się 30 st. i 20 st., powierzchnia zaś boczna równoważna jest sumie podstaw.

270. Znaleźć objętość ostrosłupa foremnego czworokątnego ściętego, mając jego przekątną, równą 9 cm., i boki podstaw, równe 7 cm. i 5 cm.

271. Znaleźć objętość ostrosłupa foremnego sześciokątnego ściętego, wiedząc, że boki jego podstaw równają się a i b, a krawędź boczna tworzy z płaszczyzną podstawy dolnej kąt 30^0.

272. Znaleźć objętość ostrosłupa foremnego dwunastokątnego ściętego, wiedząc, że promienie podstaw równają się R i r, a krawędź boczna tworzy z płaszczyzną podstawy dolnej kąt 45^0.

273. Dwie płaszczyzny, przeprowadzone przez dwa przeciwległe boki podstawy górnej prostopadle do dolnej, dzielą ostrosłup czworokątny foremny ścięty na trzy części. Znaleźć objętość każdej z części ostrosłupa, jeżeli wysokość $=$ 4 c., a boki podstaw mają 2 c. i 5 c. długości.

274. W ostrosłupie trójkątnym ściętym przez bok podstawy górnej przeprowadzona jest płaszczyzna, równoległa do przeciwległej krawędzi bocznej. W jakim stosunku została podzielona objętość ostrosłupa, jeżeli odpowiednie boki podstaw mają się do siebie, jak 1 : 2?

275. Ostrosłup czworokątny foremny ścięty ścięto jeszcze z dwóch stron przeciwległych zapomocą dwu płaszczyzn, przeprowadzonych przez końce przekątnej podstawy górnej prostopadle do tej przekątnej. Znaleźć objętość pozostałej części ostrosłupa, mając jego wysokość h oraz boki podstaw a i b.

276. Z ostrosłupa czworokątnego foremnego ściętego wyjęto dwie bryły, posiadające kształt ostrosłupów, mających wierzchołek wspólny w punkcie przecięcia przekątnych ostrosłupa danego oraz podstawy tegoż ostrosłupa za podstawy własne. Obliczyć objętość pozostałej części ostrosłupa, mając jego wysokość h oraz boki podstaw a i b.

277. W ostrosłupie ściętym odpowiednie boki dwóch podstaw mają się do siebie, jak $m:n$. W jakim stosunku przecięcie środkowe dzieli objętość tego ostrosłupa ($m:n=5:2$)?

278*. W równoległościanie ściętym 3 krawędzie boczne równają się 15 cm., 23 cm. i 18 cm. Znaleźć czwartą krawędź boczną.

279. W graniastosłupie czworokątnym foremnym ściętym bok podstawy $= a$; z pośród krawędzi bocznych dwie sąsiednie mają po b, a dwie pozostałe po c jednostek długości. Znaleźć objętość oraz powierzchnię boczną graniastosłupa.

280. Podstawą graniastosłupa prostego ściętego jest trójkąt prostokątny ABC; przyprostokątna $AB = 15$ c., $BC = 20$ c. Krawędzie boczne BB_1 i CC_1 mają po 10 c. długości, a krawędź $AA_1 = 18$ c. Znaleźć objętość i powierzchnię całkowitą graniastosłupa.

281. Podstawą graniastosłupa prostego ściętego $ABCA_1B_1C_1$ jest trójkąt równoramienny ABC; $AB = AC = 13$ c., $BC = 10$ c., krawędź boczna AA_1 ma 16 c. długości; krawędzie boczne BB_1 i CC_1 mają po 7 c. każda. Znaleźć objętość oraz powierzchnię całkowitą graniastosłupa.

282. Znaleźć objętość graniastosłupa trójkątnego ściętego, jeżeli boki jego podstawy równają się 5 cm., 6 cm. i 9 cm., a krawędzie boczne tworzą z płaszczyzną podstawy kąt 45^0 i równają się 8 cm., 10 cm. i 12 cm.

283. Znaleźć objętość graniastosłupa trójkątnego ściętego, wiedząc, że boki podstawy równają się 11 m., 24 m. i 31 m., a krawędzie boczne tworzą z płaszczyzną podstawy kąt 60^0 i równają się 10 m., 14 m. i 21 m.

284. a) Dowieść, że objętość graniastosłupa trójkątnego ściętego równa się iloczynowi z pola jego przecięcia prostopadłego przez średnią arytmetyczną trzech krawędzi bocznych.

b) Krawędzie boczne graniastosłupa trójkątnego ściętego równają się 17 c., 25 c. i 30 c., a odległości pomiędzy niemi wynoszą: 18 c., 20 c. i 34 c. Znaleźć objętość tego graniastosłupa.

285. Znaleźć objętość i powierzchnię boczną graniastosłupa trójkątnego ściętego, wiedząc, że krawędzie boczne równają się l, m i n i znajdują się w odległości a jedna od drugiej.

286. Boki podstaw ostrosłupa czworokątnego foremnego ściętego są równe a i b. Przez bok podstawy górnej i przeciwległy do niego bok podstawy dolnej przesunięto płaszczyznę. W jakim stosunku płaszczyzna ta podzieli objętość ostrosłupa?

287. Podstawą ostrosłupa czworokątnego jest równoległobok. Przez jeden z boków podstawy przesunięto płaszczyznę, która przecięła przeciwległą ścianę ostrosłupa wzdłuż linji środkowej. W jakim stosunku płaszczyzna ta podzieli objętość ostrosłupa?

Walec, stożek i stożek ścięty.

1. Walec (prosty obrotowy).

288. a) Znaleźć powierzchnię całkowitą walca, jeżeli promień podstawy = 3 cm., a wysokość = 4 cm. ($\pi = {}^{22}/_{7}$).

b) Wysokość walca jest o 10 c. większa od promienia jego podstawy, powierzchnia całkowita = π st.². Znaleźć promień podstawy i wysokość.

289. a) Znaleźć objętość walca, jeżeli promień podstawy = 5 m. i wysokość = 3 m. ($\pi = 3{,}14$).

b) Pole prostokąta = 320 c.², objętość zaś, powstała z obrotu tego prostokąta, dokoła jednego z boków = 6400 π c.³. Znaleźć boki prostokąta i wskazać, który z tych boków był osią obrotu.

290. a) Wyznaczyć stosunek powierzchni bocznej walca do pola przecięcia osiowego.

b) Jaką wysokość powinien posiadać walec, aby jego powierzchnia boczna była równoważną sumie pól podstaw?

291. Znaleźć objętość walca, jeżeli jego powierzchnia boczna = P, obwód zaś podstawy = c.

292. Znaleźć powierzchnię całkowitą i objętość walca równobocznego[1]), mając jego powierzchnię boczną P, równą 50 c.² $\left(\frac{1}{\pi} = 0{,}32\right)$.

293. a) Promień podstawy walca równa się 2 cm., wysokość zaś = 7 cm. Znaleźć promień koła, równoważnego powierzchni całkowitej tego walca.

b) Wyznaczyć zależność pomiędzy wysokością walca a promieniem jego podstawy, wiedząc, że ich suma jest promieniem koła równoważnego powierzchni całkowitej walca.

[1]) Równobocznym nazywamy taki walec, którego przecięcie osiowe jest kwadratem.

294. Dokoła dolnej podstawy walca (na jej płaszczyźnie) opisano okrąg współśrodkowy promieniem równym odległości środka podstawy dolnej od okręgu górnej. Jaką jest zależność pomiędzy wysokością walca a promieniem podstawy, jeżeli otrzymany pierścień kołowy jest równoważny powierzchni bocznej walca?

295. Pole prostopadłego przecięcia walca = Q, pole zaś przecięcia osiowego = M. Znaleźć powierzchnię całkowitą i objętość walca.

296*. Znaleźć objętość walca, jeżeli jego powierzchnia boczna = P, przekątna zaś przecięcia osiowego = l. ($P = 132$, $l = 12{,}5$, $\pi = {}^{22}/_{7}$.)

297. a) Jaką powinna być zależność pomiędzy wysokością a promieniem podstawy walca, aby jego powierzchnia boczna była równoważną kołu, opisanemu na przecięciu osiowem?

b) W zadaniu poprzedniem powierzchnię boczną zamienić przez całkowitą.

298. a) Znaleźć objętość walca, wiedząc, że jego powierzchnia boczna, rozwinięta na płaszczyźnie, jest kwadratem o boku a.

b) Znaleźć objętość walca, wiedząc, że wysokość jego = H, tworząca zaś rozwiniętej na płaszczyźnie powierzchni bocznej tworzy z przekątną kąt 60°.

299. Równolegle do osi walca przeprowadzona jest płaszczyzna, odcinająca od okręgu podstawy łuk 120°. Znaleźć pole przecięcia, jeżeli oś ma 10 cm. długości, a odległość pomiędzy osią i płaszczyzną przecięcia wynosi 2 cm.

300. Walec równoboczny o promieniu podstawy R przecięty jest na dwie części płaszczyzną, przeprowadzoną przez dwie tworzące, pomiędzy któremi zawarta jest czwarta część powierzchni bocznej walca. Znaleźć objętość i powierzchnię całkowitą mniejszej z otrzymanych części walca.

301. Równolegle do podstawy walca przeprowadzona jest płaszczyzna w ten sposób, że pole otrzymanego przecięcia jest średnią proporcjonalną pomiędzy częściami powierzchni bocznej walca. Wyznaczyć położenie płaszczyzny siecznej, mając promień podstawy R i wysokość H. Należy wskazać także warunek, przy którym zadanie tego rodzaju jest możliwe.

302. Prostokąt o bokach a i b obraca się po kolei dokoła każdego z boków. Jaki jest stosunek objętości i powierzchni całkowitych otrzymanych w ten sposób brył?

303. Trzeba dowieść, że: 1) Jeżeli powierzchnie boczne dwóch walców są równoważne, to ich objętości mają się do siebie, jak promienie podstaw. 2) Jeżeli objętości dwóch walców są równe, to ich powierzchnie boczne są odwrotnie proporcjonalne do promieni podstaw.

304. Prostokąt, obracając się dokoła każdego z nierównych boków, tworzy bryły o objętości V i F. Znaleźć przekątną prostokąta.

305. Znaleźć powierzchnię całkowitą i objętość walca, opisanego na sześcianie o krawędzi a. (Wierzchołki sześcianu znajdują się na okręgach podstaw walca.)

306. Obliczyć objętość walca, wpisanego w graniastosłup sześciokątny foremny, którego wszystkie krawędzie mają długość a.

307. Walec opisany jest na sześcianie w ten sposób, że jego osią jest przekątna sześcianu. Obliczyć powierzchnię boczną walca, mając pole płaszczyzny przekątnej, równe Q.

308. Obliczyć powierzchnię boczną i objętość walca, opisanego na ośmiościanie foremnym o krawędzi a (jedna z osi ośmiościanu jest osią walca).

309. AOB jest ćwiartką koła, którego środkiem jest punkt O; na łuku AB znajdują się punkty E C i D; punkt C jest środkiem łuku AB; BD i AE są szóste części łuku AB; CF, DG i EH są prostopadłe do promienia OA. Figura obraca się dokoła promienia OB. Dowieść, że powierzchnia, zakreślona przez DG, równa się powierzchni, zakreślonej przez EH, i połowie powierzchni, zakreślonej przez CF.

310. Prosta podzielona jest w stosunku średnim i skrajnym; korzystając z tego podziału, zbudowano dwa walce w sposób następujący: w jednym z tych walców promieniem podstawy jest większy odcinek danej prostej, wysokością zaś mniejszy odcinek; w drugim promieniem podstawy jest mniejszy odcinek, wysokością zaś cała prosta. Dowieść, że oba walce są równoważne.

311. Długość rurki, mającej kształt walca, wynosi a; promień jej powierzchni zewnętrznej $= R$, grubość ścianek rurki wynosi c. Obliczyć powierzchnię całkowitą rurki i objętość jej ścianek.

312. Objętość ścianek rurki, mającej kształt walca, równa się 15π c.^{3}; długość rurki równa się 1 st., promień powierzchni wewnętrznej $= 1$ c. Znaleźć grubość ścianek rurki.

313. Dowieść, że objętość ścianek rurki, mającej kształt walca, równa się iloczynowi z pola prostokąta [1]) tworzącego przez długość okręgu, opisanego przez punkt przecięcia przekątnych tego prostokąta; powierzchnia zaś całkowita tej rurki równa się iloczynowi z obwodu tegoż prostokąta przez długość okręgu wyżej wspomnianego.

2. Stożek (prosty obrotowy).

314. a) Obliczyć powierzchnię boczną stożka, mając promień jego podstawy, równy 2 st., oraz jego wysokość, równą 7 c. ($\pi = 3,142$).

b) Dany jest stożek, którego tworząca równa się 10 cm., powierzchnia boczna stożka jest większa od pola podstawy o 21π cm.^{2}. Znaleźć promień podstawy stożka.

c) Znaleźć wysokość stożka, wiedząc, że jego powierzchnia całkowita $= S$, tworząca zaś ma się do promienia podstawy stożka, jak $m : n$.

315. a) Obliczyć objętość stożka, mając promień podstawy, równy 7 cm., i wysokość stożka, równą 6 cm. ($\pi = {}^{22}/_7$).

b) Znaleźć objętość stożka, wiedząc, że jego tworząca równa się l, długość zaś okręgu podstawy wynosi c.

316. a) Znaleźć objętość stożka, mając pole jego podstawy Q i powierzchnię boczną P.

b) Znaleźć powierzchnię całkowitą stożka, jeżeli jego wysokość $= 15$ m., a objętość $= 320 \pi$ m.^{3}.

317. a) Znaleźć powierzchnię bryły, powstałej z obrotu cięciwy dokoła średnicy, wychodzącej z końca tej cięciwy, wiedząc, że średnica $= 25$ dm., cięciwa zaś ma 20 dm. długości.

b) Z punktu okręgu, którego promień wynosi 7 m., wyprowadzono styczną długości 24 m., a z końca tej stycznej przepro-

---

[1]) Rurkę, mającą kształt walca, można otrzymać przez obracanie prostokąta dokoła osi zewnętrznej, równoległej do jego boku.

wadzono sieczną przez środek. Znaleźć powierzchnię, którą zakreśli sieczna, wirując dokoła stycznej.

318. Trójkąt równoramienny wiruje dokoła swej wysokości. Obliczyć boki tego trójkąta, wiedząc, że jego obwód równa się 30 c., powierzchnia zaś całkowita bryły, powstałej z obrotu, wynosi 60 π c.^{2}.

319. Znaleźć objętość stożka, mając jego wysokość, równą 6 cm., oraz powierzchnię boczną, równą 24 π cm.^{2}.

320. a) Znaleźć objętość stożka, wiedząc, że jego tworząca równa się l i tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 30^0.

b) W zadaniu poprzedniem zamienić kąt 30^0 przez kąt 18^0.

321. Dowieść, że powierzchnia boczna stożka, w którym kąt przy wierzchołku [1]) równa się 120^0, jest równoważna powierzchni bocznej walca, mającego tę samą wysokość i podstawę, co i stożek.

322. a) Jaki jest stosunek wzajemny pola podstawy, powierzchni bocznej oraz powierzchni całkowitej w stożku równobocznym? [2])

b) Mając wysokość H stożka równobocznego, znaleźć jego objętość i powierzchnię całkowitą.

c) Jaki jest stosunek powierzchni bocznej stożka równobocznego do powierzchni bocznej walca równobocznego, mającego taką samą wysokość, co i stożek?

323. a) Jaki jest stosunek objętości stożka równobocznego do objętości walca równobocznego, jeżeli ich powierzchnie całkowite są równoważne?

b) Wyznaczyć stosunek powierzchni całkowitej stożka równobocznego do powierzchni całkowitej walca równobocznego, jeżeli objętości ich są równe.

324. Znaleźć zależność pomiędzy tworzącą stożka a promieniem jego podstawy, wiedząc, że powierzchnia boczna stożka jest średnią proporcjonalną pomiędzy polem podstawy a powierzchnią całkowitą stożka.

325. a) Jaką winna być zależność pomiędzy tworzącą stożka a promieniem jego podstawy, aby powierzchnia całkowita tego stożka była równoważna kołu o promieniu równym wysokości stożka.

---

[1]) T. j. kąt, utworzony przez przeciwległe tworzące stożka.
[2]) T. j. takim, w którym przecięcie osiowe jest trójkątem równobocznym.

b) Jaką winna być zależność pomiędzy tworzącą stożka a promieniem jego podstawy, aby powierzchnia całkowita tego stożka była równoważna kołu o promieniu, równym tworzącej stożka.

326. a) Obliczyć pole przecięcia osiowego stożka, mając jego objętość V oraz promień jego podstawy R.

b) Znaleźć objętość i powierzchnię boczną stożka, mając pole jego podstawy Q oraz pole jego przecięcia osiowego M.

327. Promień podstawy stożka $= R$, jego zaś powierzchnia boczna jest równoważna sumie podstawy i przecięcia osiowego. Znaleźć objętość tego stożka.

328*. Znaleźć objętość stożka, mając jego tworzącą l oraz pole jego przecięcia osiowego M.

329. a) Promień podstawy stożka równa się R. Znaleźć pole przecięcia równoległego, dzielącego wysokość stożka w stosunku $m : n$ (licząc od wierzchołka do podstawy).

b) Na podstawie wspólnej zbudowano stożek i równoważny walec. Równolegle do podstawy przeprowadzono przez środek wysokości walca płaszczyznę. Jaki będzie stosunek wzajemny pól otrzymanych przecięć stożka i walca?

330*. Promień podstawy stożka równa się R, tworząca zaś jego l. Wyznaczyć odcinek tworzącej, zawarty pomiędzy wierzchołkiem stożka a przecięciem równoległem, którego pole jest średnią proporcjonalną pomiędzy przyległemi częściami powierzchni bocznej. Np. gdy $R = {}^3/_4\ l$.

331. W stożku, którego wysokość równa się promieniowi podstawy R, przeprowadzona jest przez wierzchołek płaszczyzna, odcinająca od okręgu podstawy łuk 90^0. Obliczyć pole otrzymanego przecięcia.

332. a) Mając promień podstawy R i tworzącą stożka l, znaleźć kąt rozwiniętej na płaszczyźnie powierzchni bocznej stożka. W danym wypadku stożek jest równoboczny.

b) Obliczyć, ile stopni całkowitych posiada kąt rozwiniętej na płaszczyźnie powierzchni bocznej stożka, jeżeli: a) jego kąt osiowy jest prosty, b) tworząca z płaszczyzną podstawy tworzy kąt 30^0.

333. a) Powierzchnia boczna stożka $=$ 80 c.^{2}, kąt rozwiniętej na płaszczyźnie powierzchni bocznej równa się 112^0 30′. Obliczyć pole podstawy stożka.

b) Powierzchnia boczna stożka = 10 c.^{2}; będąc rozwiniętą na płaszczyźnie, jest ona wycinkiem koła o łuku, równym 36^0. Znaleźć powierzchnię całkowitą stożka.

c) Powierzchnia boczna stożka jest zwinięta ćwiartką koła. Obliczyć powierzchnię całkowitą stożka, mając pole jego przecięcia osiowego M.

334*. a) Znaleźć objętość stożka, jeżeli jego powierzchnia boczna, rozwinięta na płaszczyźnie, tworzy wycinek koła o promieniu równym 50 c., a kąt środkowy tego wycinka zawiera $100^0\ 48'$.

b) Objętość stożka równa się V; kąt rozwiniętej na płaszczyźnie powierzchni bocznej równa się 120^0. Obliczyć powierzchnię całkowitą stożka.

335. Dwa stożki posiadają jednakowe tworzące długości l; rozwinięte na płaszczyźnie ich powierzchnie boczne dopełniają się wzajemnie, tworząc koło. Powierzchnie całkowite stożków mają się do siebie, jak $1 : 6$. Znaleźć promienie podstaw stożków.

336. Mając promień podstawy stożka R, znaleźć: 1) promień przecięcia równoległego, dzielącego powierzchnię boczną stożka na dwie części równoważne; 2) promień przecięcia równoległego, dzielącego objętość stożka na dwie części równoważne.

337. Znaleźć objętość i powierzchnię boczną stożka, wpisanego w czworościan foremny o krawędzi a.

338. W stożek równoboczny wpisany jest ostrosłup czworokątny foremny. Wyznaczyć stosunek wzajemny powierzchni bocznych stożka i ostrosłupa.

339. Na stożku o promieniu podstawy R opisany jest ostrosłup (nieforemny), którego obwód podstawy równa się $2p$. Jaki jest stosunek objętości i powierzchni bocznych obu brył?

340. W stożek o promieniu podstawy, równym 39 c., i wysokości, równej 52 c., wpisany jest walec takiej wysokości, że jego powierzchnia boczna jest równoważna powierzchni bocznej stożka mniejszego, stojącego na podstawie górnej walca. Wyznaczyć wysokość walca.

341. W stożek, o wysokości H i tworzącej l, wpisany jest walec, którego powierzchnia boczna jest n razy mniejsza od powierzchni bocznej stożka. Znaleźć wysokość walca ($l = 1^1/_2\ H$; $n = 4$).

342. W stożek, w którym kąt przy wierzchołku jest prosty, wpisany jest walec, którego powierzchnia całkowita jest równoważna powierzchni bocznej stożka. Dowieść, że odległość pomiędzy wierzchołkiem stożka a podstawą górną walca równa się połowie tworzącej stożka.

343. Mając promień podstawy stożka R i jego wysokość H, znaleźć krawędź wpisanego w ten stożek sześcianu.

344. W stożek o promieniu podstawy R i wysokości H wpisany jest graniastosłup trójkątny foremny, którego ściany boczne są kwadratami. Znaleźć krawędź tego graniastosłupa.

345. Znaleźć objętość i powierzchnię bryły (podwójnego stożka), powstałej z obrotu trójkąta prostokątnego dokoła przeciwprostokątnej, wiedząc, że przyprostokątne trójkąta równają się a i b.

346. a) Znaleźć objętość i powierzchnię bryły, otrzymanej z obrotu trójkąta równoramiennego dokoła jednego z ramion, jeżeli wiemy, że podstawa trójkąta równa się 30 cm., a każde z ramion ma 25 cm. długości.

b) Znaleźć objętość i powierzchnię bryły, powstałej z obrotu trójkąta równoramiennego dokoła ramienia, jeżeli kąt przy wierzchołku trójkąta = 120^0, ramię zaś = a.

347. a) Boki trójkąta równają się: 10 cm., 17 cm. i 21 cm. Znaleźć objętość i powierzchnię bryły, powstałej z obrotu tego trójkąta dokoła jego boku największego.

b) Boki trójkąta równają się 6 cm., 25 cm. i 29 cm. Znaleźć objętość i powierzchnię bryły, powstałej z obrotu tego trójkąta dokoła jego boku najmniejszego.

348. Znaleźć objętość i powierzchnię bryły, powstałej z obrotu trójkąta, w którym kąt, zawarty pomiędzy bokami o długości 8 c. i 15 c., ma 60^0, dokoła większego z tych boków.

349. Półkole o średnicy AB jest podzielone w punkcie M w stosunku $1 : 2$. Znaleźć objętość i powierzchnię bryły, powstałej z obrotu trójkąta AMB dokoła osi AB, wiedząc, że najmniejszy bok trójkąta równa się a.

350*. Dowieść, że objętości, powstałe z obrotu jakiegokolwiek bądź trójkąta kolejno dokoła każdego z boków, są odwrotnie proporcjonalne do tych boków.

3. Stożek ścięty.

351. a) Znaleźć powierzchnię boczną stożka ściętego, mając jego wysokość, równą 1 st., oraz promienie jego podstaw, równe 10 c. i 15 c. ($\pi = 3{,}142$).

b) Znaleźć wysokość stożka ściętego, wiedząc, że jego powierzchnia całkowita $= 572\,\pi$ m.², a promienie podstaw równają się 6 m. i 14 m.

c) Znaleźć promienie podstaw stożka ściętego, wiedząc, że jego wysokość $= 63$ dm., tworząca $= 65$ dm., a powierzchnia boczna $= 26\,\pi$ m.².

352. a) Objętość stożka ściętego $= 584\,\pi$ cm.³, a promienie jego podstaw równają się 10 cm. i 7 cm. Znaleźć wysokość stożka.

b) Znaleźć promienie podstaw i tworzącą stożka ściętego, wiedząc, że ich stosunek jest równy stosunkowi $4 : 11 : 25$, objętość zaś stożka $= 181\,\pi$ m.³.

c) Objętość stożka ściętego wynosi $248\,\pi$ c.³, jego wysokość $= 8$ c., a promień jednej z podstaw ma 4 c. długości. Znaleźć promień drugiej podstawy.

353. a) Stożek ścięty, w którym promienie podstaw równają się 3 dm. i 5 dm., równoważny jest stożkowi całemu o takiej wysokości. Znaleźć promień podstawy stożka całego.

b) Tworząca stożka ściętego ma 5 cm. długości; promienie jego podstaw równają się 1 cm. i 5 cm. Znaleźć promień walca o takiej samej wysokości i o powierzchni bocznej, równoważnej powierzchni bocznej stożka.

c) Promienie podstaw stożka ściętego mają 6 cm. i 10 cm. długości, a jego tworząca $= 5$ cm. Należy: a) znaleźć promień walca tej samej wysokości, którego powierzchnia całkowita ma być równoważna powierzchni bocznej danego stożka ściętego; b) znaleźć promień walca tej samej wysokości, którego powierzchnia całkowita ma być równoważna powierzchni całkowitej danego stożka ściętego.

354. a) W stożku ściętym przez okrąg podstawy górnej przesunięto powierzchnię walcowatą aż do płaszczyzny podstawy dolnej. Wyznaczyć zależność pomiędzy promieniami podstaw stożka, jeżeli otrzymany walec jest siódmą częścią stożka ściętego.

b) Wyznaczyć zależność pomiędzy promieniami podstaw stożka ściętego, jeżeli powierzchnia stożka, którego podstawą jest podstawa dolna stożka ściętego, a wierzchołkiem środek podstawy górnej tego ostatniego, dzieli objętość stożka ściętego na dwie części równoważne.

355. Powierzchnia boczna stożka ściętego równa się P, a promienie jego podstaw równają się R i r. Znaleźć powierzchnię boczną stożka całego.

356. Znaleźć sumę pól podstaw stożka ściętego, mając jego wysokość h, tworzącą l i objętość V.

357. Objętość stożka ściętego wynosi $2580\,\pi$ c.³, jego wysokość $= 15$ c. i stanowi $^3/_8$ wysokości stożka całego. Znaleźć promienie podstaw.

358. Znaleźć wysokość stożka ściętego, jeżeli jego powierzchnia boczna jest równoważna sumie podstaw, a promienie podstaw równają się R i r.

359. a) Boki równoległe trapezu równoramiennego mają 7 c. i 17 c. długości, a jego pole $= 1$ st.². Znaleźć objętość i powierzchnię boczną bryły, powstałej z obrotu tego trapezu dokoła wysokości środkowej.

b) AB jest średnicą półkola; $ACDB$ jest to wpisany w to półkole trapez, w którym $\angle\ CAB = 60^0$. Znaleźć objętość i powierzchnię całkowitą bryły, powstałej z obrotu trapezu dokoła promienia, prostopadłego do AB, jeżeli promień $= R$.

360. a) Znaleźć objętość i powierzchnię boczną stożka ściętego, jeżeli jego tworząca tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 45^0, promienie zaś podstaw równają się R i r.

b) Znaleźć powierzchnię boczną stożka ściętego, jeżeli jego tworząca z płaszczyzną podstawy tworzy kąt 60^0, pola zaś podstaw równają się Q i q.

c) Znaleźć powierzchnię boczną stożka ściętego, mając promień jego podstawy dolnej R, promień podstawy górnej, równy połowie tworzącej, oraz kąt tworzącej z podstawą dolną, równy 72^0.

361. a) Znaleźć pole przecięcia osiowego stożka ściętego, mając jego wysokość h, tworzącą l i powierzchnię boczną P.

b) Znaleźć pole przecięcia osiowego stożka ściętego, jeżeli pola jego podstaw równają się Q i q, powierzchnia zaś boczna wynosi P.

362. Znaleźć objętość stożka ściętego, wiedząc, że pole jego przecięcia osiowego jest równoważne różnicy pól podstaw, promienie zaś jego podstaw równają się R i r.

363. Znaleźć powierzchnię boczną stożka ściętego, wiedząc, że jego tworząca z płaszczyzną podstawy tworzy kąt 30^0, pole zaś przecięcia osiowego równa się F.

364. W stożku ściętym dane są promienie podstaw $R = 7$ i $r = 1$. Obliczyć pole przecięcia środkowego oraz wyzna-

czyć położenie przecięcia równoległego, będącego średnią arytmetyczną pól podstaw.

365. Znaleźć promienie podstaw stożka ściętego, mając jego wysokość, równą 1,2 m., pole przecięcia środkowego, równe 225π dm.², oraz objętość stożka, równą 2800π dm.³.

366. Znaleźć objętość i powierzchnię boczną stożka ściętego, jeżeli jego tworząca = 17 c., pole przecięcia osiowego = 420 c.² i pole przecięcia środkowego = 196π c.².

367. Stożek ścięty o promieniach podstaw równych 4 c. i 22 c. należy zamienić na równoważny walec o tejże wysokości. Znaleźć promień tego walca i porównać go z promieniem przecięcia środkowego oraz z promieniem przecięcia, którego pole jest średnią arytmetyczną pomiędzy polami podstaw.

368. Wysokość stożka ściętego = 10 cm., promienie jego podstaw równają się 8 cm. i 18 cm. W jakiej odległości od podstawy górnej znajduje się przecięcie równoległe, którego pole jest średnią proporcjonalną pomiędzy polami podstaw.

369. a) Wysokość stożka ściętego = 18 c.; promienie jego podstaw równają się 5 c. i 11 c. Wysokość stożka jest podzielona na trzy części równe przez dwie płaszczyzny, równoległe do podstaw. Znaleźć objętości wszystkich części stożka ściętego.

b) Wysokość stożka ściętego podzielona jest na kilka równych części i przez punkty podziału przeprowadzone są płaszczyzny równoległe do podstaw. Dowieść: a) że promienie podstaw i przecięć tworzą postęp arytmetyczny; b) że kolejno po sobie następujące części powierzchni bocznej tworzą także postęp arytmetyczny.

370. Tworząca stożka ściętego równa się l; promienie jego podstaw równają się R i r. Wyznaczyć wielkość łuków rozwiniętej na płaszczyźnie powierzchni bocznej stożka.

371. Promienie podstaw stożka ściętego równają się 1 dm. i 3 dm. Znaleźć jego tworzącą, jeżeli powierzchnia całkowita jest równoważna polu pierścienia kołowego, którego częścią jest rozwinięta na płaszczyźnie powierzchnia boczna stożka ściętego.

372. W stożku ściętym, w którym promienie podstaw równają się 1 cm. i 7 cm., a tworząca ma 9 cm. długości, przeprowadzone jest przecięcie równoległe w ten sposób, że powierzchnia boczna stożka podzielona została na dwie części równoważne. Znaleźć promień przecięcia i odcinek górny tworzącej.

373. Promienie podstaw stożka ściętego równają się R i r. W jakim stosunku (licząc od góry) przecięcie środkowe podzieliło objętość stożka danego?

374. Mając promienie podstaw stożka ściętego R i r, wyznaczyć stosunek objętości stożka ściętego do objętości stożka całego.

375*. Promienie podstaw stożka ściętego równają się R i r, a jego wysokość wynosi h. Znaleźć promień (ρ) przecięcia równoległego, dzielącego objętość stożka ściętego na dwie części równoważne, oraz odległość (x) pomiędzy podstawą górną a przecięciem równoległem ($R = 11$; $r = 5$).

376. Promienie podstaw stożka ściętego równają się R i r; wysokość jego wynosi h. Ze stożka tego wykrajano dwa stożki, którym za podstawy służą podstawy stożka ściętego, a tworzące jednego ze stożków są przedłużeniami tworzących drugiego. Znaleźć objętość pozostałej części stożka ściętego.

377. AOB jest ćwiartką koła; C i D są to punkty, dzielące łuk AB na trzy części równe. Po przeprowadzeniu cięciw AB i CD obracamy figurę dokoła jednego z promieni bocznych. Dowieść, że cięciwa CD zakreśli powierzchnię dwa razy mniejszą, niż cięciwa AB.

4. Bryły obrotowe, dające się sprowadzać do walców i stożków.

Uwaga: W zadaniach tych i dalszych przypuszczamy, że oś obrotu znajduje się na płaszczyźnie figur obracanych.

378. Kwadrat o boku a obraca się dokoła osi, przeprowadzonej prostopadle przez koniec przekątnej. Znaleźć objętość i powierzchnię otrzymanej bryły.

379. Kwadrat o boku a obraca się dokoła osi zewnętrznej, równoległej do jego boku i znajdującej się od niego w odległości równej długości boku. Należy: 1) znaleźć objętość i powierzchnię otrzymanej bryły, 2) dołączywszy do tego obrotu obrót przekątnej kwadratu, wyznaczyć, w jakim stosunku powierzchnia, zakreślona przez obrót przekątnej, podzieli objętość, powstałą z obrotu kwadratu.

380. a) Trójkąt równoboczny obraca się dokoła osi, przechodzącej prostopadle przez koniec boku. Jaki jest stosunek powierzchni, zakreślonych przez każdy z boków trójkąta?

b) Trójkąt równoboczny obraca się początkowo dokoła swego boku, następnie zaś dokoła osi, przechodzącej przez wierzchołek równolegle do boku. Dowieść, że objętość i powierzchnia bryły, powstałej z drugiego obrotu, jest dwa razy większa od objętości i powierzchni bryły, powstałej z pierwszego obrotu.

381. Trójkąt równoboczny o boku a obraca się dokoła osi zewnętrznej, równoległej do boku i znajdującej się od niego w odległości, równej apotemie trójkąta. Znaleźć objętość i powierzchnię otrzymanej bryły obrotowej.

382. Bok a trójkąta równobocznego przedłużony jest o długość a. Przez koniec przedłużenia przeprowadzono prostopadłą do niego. Znaleźć objętość i powierzchnię bryły, powstałej z obrotu trójkąta dokoła prostopadłej.

383. Wysokość trójkąta równobocznego przedłużona jest poza wierzchołek trójkąta o swoją długość. Przez koniec przedłużenia przeprowadzono prostopadłą do niego. Mając bok trójkąta a, znaleźć objętość i powierzchnię bryły, powstałej z obrotu trójkąta dokoła prostopadłej.

384. Na bokach kwadratu zbudowane są trójkąty równoboczne. Utworzona figura obraca się dokoła prostej, łączącej wierzchołki zewnętrzne dwóch trójkątów przeciwległych. Znaleźć objętość i powierzchnię bryły, powstałej z tego obrotu, jeżeli bok kwadratu $= a$.

385. Znaleźć objętość i powierzchnię brył, powstałych z obrotu sześciokąta foremnego: 1) dokoła średnicy; 2) dokoła apotemy, wiedząc, że bok sześciokąta równa się a.

386. Sześciokąt foremny obraca się dokoła swego boku. Znaleźć objętość i powierzchnię bryły, powstałej z tego obrotu, wiedząc, że bok sześciokąta $= a$.

387. Sześciokąt foremny o boku a obraca się dokoła osi, przechodzącej przez jego wierzchołek prostopadle do promienia, przechodzącego przez ten wierzchołek. Znaleźć objętość i powierzchnię bryły, powstałej z tego obrotu.

388. Sześciokąt foremny o boku a obraca się dokoła osi zewnętrznej, równoległej do jego boku i znajdującej się od niego w odległości równej apotemie sześciokąta. Znaleźć objętość i powierzchnię otrzymanej z tego obrotu bryły.

389. Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych, równych 5 c. i 1 st., obraca się dokoła osi wewnętrznej, przeprowadzonej równolegle do większej przyprostokątnej w odległości 3 c. Znaleźć objętość i powierzchnię bryły, powstałej z tego obrotu.

390. Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych, równych 15 c. i 20 c., obraca się dokoła pionu, spuszczonego na przeciwprostokątną z wierzchołka większego kąta ostrego. Znaleźć objętość i powierzchnię bryły, powstałej z tego obrotu.

391. Trójkąt o bokach, równych 9 cm., 10 cm. i 17 cm., obraca się dokoła wysokości, wychodzącej z wierzchołka najmniejszego kąta. Znaleźć objętość i powierzchnię bryły, powstałej z tego obrotu.

392. Trójkąt o bokach, równych 8 dm. i 5 dm., pomiędzy któremi zawarty jest kąt 60°, obraca się dokoła osi, przechodzącej przez wierzchołek tego kąta, prostopadle do najmniejszego boku. Znaleźć objętość i powierzchnię bryły, powstałej z tego obrotu.

393. a) Dowieść, że przy wszelkiem położeniu wierzchołka trójkąta na linji, równoległej do podstawy, objętość bryły, powstałej z obrotu trójkąta dokoła tej linji, lub dokoła podstawy, jest wielkością stałą.

b) Trójkąt obraca się kolejno dokoła podstawy i dokoła prostej, równoległej do podstawy, przeprowadzonej przez wierzchołek. Dowieść, że otrzymana z drugiego obrotu objętość jest dwa razy większa od objętości, powstałej z obrotu pierwszego.

394. a) W trójkącie środki dwóch boków są połączone zapomocą prostej. Trójkąt ten obraca się dokoła boku trzeciego. Znaleźć stosunek objętości brył, powstałych z obrotu poszczególnych części trójkąta.

b) Trójkąt, w którym przeprowadzona jest środkowa, obraca się dokoła jednego z boków, nie podzielonych przez środkową. Wyznaczyć stosunek objętości brył, powstałych z obrotu każdej części trójkąta.

395. Dowieść, że objętości, powstałe z obrotu równoległoboku, kolejno dokoła każdego z dwóch boków przyległych, są odwrotnie proporcjonalne do tych boków.

396. Romb, którego pole $= Q$, obraca się dokoła swego boku. Znaleźć powierzchnię powstałej z tego obrotu bryły.

397. a) Romb o boku a i kącie ostrym, równym 60°, obraca się dokoła osi, przechodzącej prostopadle do boku rombu przez wierzchołek tego kąta. Znaleźć objętość i powierzchnię bryły, powstałej z tego obrotu.

b) W zadaniu poprzedniem kąt 60° zamienić przez kąt 45°.

398. a) Mając boki prostokąta a i b, znaleźć objętość i powierzchnię bryły, powstałej z obrotu tego prostokąta dokoła osi, przechodzącej przez wierzchołek równolegle do przekątnej prostokąta.

b) Mając boki prostokąta a i b, znaleźć objętość i powierzchnię bryły, powstałej z obrotu tego prostokąta dokoła osi, przechodzącej prostopadle przez koniec przekątnej.

399. Trapez równoramienny, w którym kąt ostry $= 45^0$, każde zaś z ramion równe jest podstawie mniejszej, obraca się dokoła jednego z ramion. Znaleźć objętość i powierzchnię bryły, powstałej z tego obrotu, jeżeli ramię trapezu $= a$.

400. W półkolu o promieniu R wpisany jest trapez w ten sposób, że jego dolną podstawą jest średnica półkola, bok zaś nierównoległy podpiera łuk, równy 30^0. Znaleźć objętość i powierzchnię bryły, powstałej z obrotu tego trapezu dokoła promienia, prostopadłego do jego podstaw.

401. ACB jest półkolem o promieniu R; AC jest to łuk, równy 30^0. Znaleźć objętość i powierzchnię bryły, powstałej z obrotu trójkąta ACB dokoła średnicy AB.

402. MON jest średnicą koła, którego promień równa się R; OA jest to promień, prostopadły do MN; BC jest cięciwa, przeprowadzona przez środek promienia OA i prostopadła do niego. Znaleźć objętość i powierzchnię bryły, powstałej z obrotu trójkąta ABC dokoła osi MN.

403. ACB jest ćwiartką okręgu o promieniu R; C jest to środek łuku ACB. Znaleźć objętość bryły, powstałej z obrotu trójkąta ACB dokoła promienia OA (lub OB).

404. Punkt D jest środkiem półokręgu $ADCB$; na tym półokręgu odcięto łuk DC, równy 30^0, i nakreślono trójkąt ADC. Mając promień R, znaleźć objętość bryły, powstałej z obrotu tego trójkąta dokoła średnicy AB.

405. AB jest średnicą połowy okręgu o promieniu R; BC jest to łuk, zawierający 60^0. Przeprowadzono cięciwę AC i styczną CD w ten sposób, że D jest punktem na przedłużeniu średnicy AB. Znaleźć objętość i powierzchnie bryły, powstałej z obrotu trójkąta ACD dokoła osi AD.

Kula i jej części.

1. Kula.

406. a) W kuli o promieniu, równym 41 dm., w odległości 9 dm. od środka przeprowadzona jest płaszczyzna. Znaleźć pole otrzymanego przecięcia.

b) Przez środek promienia kuli przeprowadzona jest płaszczyzna, prostopadła do niego. Jaki jest stosunek pola otrzymanego przecięcia do pola koła wielkiego kuli?

407. Promień kuli $= 63$ c. Punkt dany znajduje się na stycznej do kuli płaszczyźnie w odległości 16 c. od punktu styczności. Znaleźć najmniejszą odległość pomiędzy tym punktem a powierzchnią kuli.

408. Kąt pomiędzy promieniami, łączącemi dwa punkty powierzchni kuli z jej środkiem, równa się 60^0; najkrótsza odległość na powierzchni kuli pomiędzy temi punktami wynosi 5 cm. Znaleźć promień kuli $\left(\frac{1}{\pi} = 0{,}32\right)$.

409. Półkula i wpisany w nią stożek mają wspólną podstawę i wspólną wysokość. Przez środek wysokości przeprowadzono płaszczyznę, równoległą do podstawy. Dowieść, że pole przecięcia, zawarte pomiędzy powierzchnią boczną stożka a powierzchnią półkuli, równe jest połowie pola podstawy.

410. Bryła [1]) jest ograniczona dwiema współśrodkowemi powierzchniami kulistemi. Dowieść, że przecięcie tej bryły, przechodzące przez środek, jest równoważne przecięciu, stycznemu do powierzchni kulistej wewnętrznej.

411. a) Dwie jednakowe kule o promieniu R położone są w ten sposób, że środek jednej znajduje się na powierzchni drugiej. Znaleźć długość linji przecięcia powierzchni obu kul.

---

[1]) Kula próżna.

b) Promienie dwóch kul równają się 25 dm. i 29 dm., odległość zaś pomiędzy ich środkami wynosi 36 dm. Znaleźć długość linji przecięcia ich powierzchni.

412. a) Promień kuli = 5 c. Znaleźć jej objętość i powierzchnię ($\pi = 3{,}1416$).

b) Powierzchnia kuli = 225 π st.^{2}. Znaleźć jej objętość.

c) Mając objętość kuli V, znaleźć jej powierzchnię.

413. Promienie trzech kul równają się 3 c., 4 c. i 5 c. Znaleźć: a) promień kuli, której objętość jest równoważna sumie objętości wszystkich trzech kul; b) promień kuli, której powierzchnia jest równoważna sumie powierzchni trzech kul.

414. a) Jak się zmieni powierzchnia i objętość kuli, jeżeli jej promień zwiększyć 4 razy? 5 razy?

b) Powierzchnie dwóch kul mają się do siebie, jak $m : n$. W jakim stosunku pozostają do siebie ich objętości?

c) Objętości dwóch kul mają się do siebie, jak $m : n$. W jakim stosunku pozostają do siebie ich powierzchnie?

415. Dowieść, że jeżeli promienie trzech kul mają się do siebie, jak 1 : 2 : 3, to objętość największej kuli jest trzy razy większa od sumy objętości kul pozostałych.

416. Przeciwprostokątna i przyprostokątne są średnicami 3 kul. Znaleźć zależność pomiędzy powierzchniami tych kul.

417. W kuli przeprowadzone są dwa równoległe przecięcia (z jednej strony środka); pola tych przecięć równają się 49 π dm.^{2} i 4 π m.^{2}, odległość zaś pomiędzy niemi wynosi 9 dm. Znaleźć powierzchnię kuli.

418. Objętość ścianek pustej wewnątrz kuli wynosi 876 π c.^{3}, grubość zaś tych ścianek = 3 c. Znaleźć promienie powierzchni tej kuli: zewnętrznej i wewnętrznej.

419. a) Dowieść, że powierzchnia całkowita stożka równobocznego równoważna jest powierzchni kuli, której średnicą jest wysokość stożka.

b) Dowieść, że jeżeli stożek równoboczny i półkula mają podstawę wspólną, to powierzchnia boczna stożka równoważna jest powierzchni półkuli, linja zaś ich przecięcia jest dwa razy mniejsza od obwodu podstawy.

420. Metalowy walec równoboczny przetopiony został na kulę. Jaki jest stosunek powierzchni walca do powierzchni nowoutworzonej kuli?

421. Dowieść, że jeżeli stożek, walec i kula posiadają wysokość wspólną, a podstawa stożka i walca równa jest wielkiemu kołu kuli, to objętości tych brył mają się do siebie, jak 1 : 2 : 3.

422. W podstawę górną walca równobocznego, którego promień równa się R, wpisany jest kwadrat, na którym zbudowano ostrosłup czworokątny foremny o ścianach równobocznych. Objętość otrzymanej bryły jest równoważna objętości kuli. Znaleźć promień tej kuli.

423. W ćwiartce koła $OACB$, którego środkiem jest punkt O, przeprowadzona jest cięciwa AB, podpierająca łuk ćwiartki ACB. Jeżeli figurę będziemy obracać dokoła jednego z promieni bocznych, to trójkąt AOB i odcinek ACB zakreślą jednakowe objętości. Dowieść tego.

424. Dowieść, że powierzchnia bryły, powstałej z obrotu kwadratu dokoła jego boku, równoważna jest powierzchni kuli, której promieniem jest bok kwadratu.

425. Przyprostokątna trójkąta równoramiennego prostokątnego przedłużona jest poza wierzchołek kąta prostego o swoją długość. Przez koniec przedłużenia przeprowadzona jest prosta, równoległa do drugiej przyprostokątnej. Dokoła tej prostej obraca się dany trójkąt. Dowieść, że powstała z tego obrotu bryła równoważna jest kuli, której promieniem jest przyprostokątna.

2. Części kuli.

426. Znaleźć powierzchnię pasa kulistego, mając promienie jego podstaw, równe 20 m. i 24 m., oraz promień kuli, równy 25 m.

427. Mając promień kuli R, znaleźć wysokość warstwy kulistej, której jedna z podstaw jest kołem wielkiem kuli, a powierzchnia boczna równoważna jest sumie podstaw.

428. a) Znaleźć powierzchnię pasa kulistego, mając jego wysokość, równą 7 cm., i promienie jego podstaw, równe 16 cm. i 33 cm.

b) Mając wysokość h i promienie podstaw r i r_1 ($r > r_1$) pasa kulistego, znaleźć jego powierzchnię.

429. Mając promień kuli R, znaleźć wysokość odcinka kuli, którego powierzchnia boczna jest m razy większa od pola podstawy ($m = 4$).

430. Dowieść, że jeżeli półkole, podzielone na 3 części równe, obraca się dokoła swej średnicy, to powierzchnia, opisana przez łuk środkowy, równoważna jest sumie powierzchni, opisanych przez łuki boczne.

431. Znaleźć powierzchnię krzywą odcinka kuli, mając jego wysokość h i promień podstawy r.

432. Odcinek koła, którego łuk zawiera 120°, a pole równa się Q, wiruje dokoła swej wysokości. Znaleźć powierzchnię całkowitą bryły, powstałej z tego obrotu.

433. Dowieść, że powierzchnia boczna stożka, wpisanego w odcinek kuli, jest średnią proporcjonalną pomiędzy polem podstawy a powierzchnią boczną tego odcinka.

434. Powierzchnia krzywa odcinka kuli jest n razy większą od powierzchni bocznej stożka, wpisanego w ten odcinek. Jaki jest stosunek wysokości odcinka do średnicy kuli?

435. a) Promień kuli = 15 cm. Obliczyć tę część jej powierzchni, która widoczna jest z punktu, odległego od środka kuli o 25 cm.

b) W jakiej odległości od środka kuli (o promieniu R) winien się znajdować punkt świecący, któryby oświetlał $^1/_2$ powierzchni kuli.

436. Znaleźć objętość wycinka kuli, mając promień okręgu jego podstawy, równy 60 c., i promień kuli, równy 75 c.

437. Znaleźć objętość wycinka kuli, mając pole jego podstawy M i powierzchnię boczną N.

438. Wycinek koła, którego kąt jest prosty, a pole równa się Q, wiruje dokoła promienia środkowego (dwusiecznego). Znaleźć powierzchnię powstałej z tego obrotu bryły.

439. Wycinek koła o kącie, równym 30°, i o promieniu R obraca się dokoła jednego z promieni bocznych. Znaleźć powierzchnię i objętość bryły, powstałej z obrotu.

440. Dowieść, że objętość wycinka kuli, w którym przecięcie osiowe wynosi $^1/_3$ koła, równa się $^1/_4$ objętości kuli.

441. Jaką część objętości kuli stanowi objętość jej wycinka, w którym podstawa jest równoważna powierzchni bocznej?

442. Płaszczyzna, na której znajduje się okrąg podstawy wycinka kuli, dzieli ten wycinek na dwie części równoważne. Wyznaczyć odległość pomiędzy środkiem kuli a tą płaszczyzną, mając promień kuli R.

443. Objętość stożka należy podzielić na dwie części równe zapomocą powierzchni kulistej, której środek znajduje się w wierzchołku stożka. Znaleźć promień tej powierzchni, mając wysokość stożka h i tworzącą l.

444. W kuli o promieniu, równym 65 cm., przeprowadzone są (z jednej strony środka kuli) dwie płaszczyzny równoległe, odległe od środka kuli o 16 cm. i 25 cm. Znaleźć objętość części kuli, zawartej pomiędzy płaszczyznami.

445. Promień kuli = 25 c.; promień jednej z podstaw warstwy kulistej = 15 c.; powierzchnia boczna tej warstwy wynosi 1350 π c.². Znaleźć jej objętość.

446. a) Znaleźć objętość odcinka kuli, mając jego wysokość, równą 3 dm., oraz promień jego podstawy, równy 7 dm.

b) Jakiej części objętości kuli równa się jej odcinek o wysokości, równej 0,1 średnicy kuli?

447. Wysokość odcinka kuli wynosi $^2/_5$ promienia kuli. Jakiej części objętości walca, o tej samej, co i odcinek kuli, podstawie i wysokości, równa się objętość odcinka?

448*. Płaszczyzna dzieli powierzchnię kuli w stosunku 1 : 2. W jakim stosunku dzieli ta płaszczyzna objętość kuli?

449. Dwie jednakowe kule są w ten sposób położone względem siebie, że środek jednej znajduje się na powierzchni drugiej. Jaki jest stosunek objętości wspólnej obu kulom części do objętości kuli?

450. Bryła ma postać odcinka kulistego, wewnątrz koncentrycznie wydrążonego. Szerokość pierścienia kołowego, pozostałego od podstawy odcinka, równa się 4 c.; głębokość wydrążenia wynosi 1 c., średnica zaś jego początkowa ma 10 c. długości. Znaleźć powierzchnię całkowitą i objętość bryły.

451. Średnica kuli ma 30 cm. długości i jest osią walca, którego promień podstawy równa się 12 cm. Obliczyć objętość części kuli, zawartej wewnątrz walca.

452. W kuli o promieniu R zrobiony jest otwór, mający kształt walca; oś tego walca przechodzi przez środek kuli. Suma

powierzchni na obu końcach otworu wynosi m/n powierzchni kuli. Pozostała część objętości kuli równoważna jest innej kuli. Znaleźć promień tej ostatniej.

453. W kuli o promieniu R zrobiony jest otwór, mający kształt walca o pojemności równej połowie objętości kuli. Znaleźć promień otworu i tworzącą walca (we wnętrzu kuli), jeżeli oś walca przechodzi przez środek kuli.

---

454. AB jest średnicą półkola o promieniu R, którego środkiem jest punkt O; BC jest to przedłużenie średnicy AB; CD — styczna; DE — prostopadła do średnicy AB. Figura obraca się dokoła osi ABC. Wyznaczyć odległość OE, jeżeli prosta CD i łuk DFA zakreślają powierzchnie jednakowe.

455. Na półokręgu o promieniu R od końca jego średnicy AB odcięto łuk BMC, równy 60^0. Punkt C połączono z punktem A. Znaleźć objętość i powierzchnię bryły, powstałej z obrotu figury, której obwód składają: średnica AB, cięciwa AC i łuk BMC, jeżeli osią obrotu jest AB.

456. Na półokręgu o promieniu R od końca jego średnicy AB odcięto łuk BMC, równy 45^0; z punktu C wyprowadzono styczną, przecinającą przedłużenie średnicy AB w punkcie D. Figura, której obwód składają: proste BD i CD i łuk BMC, obraca się dokoła BD. Znaleźć objętość i powierzchnię otrzymanej bryły.

457. O jest środkiem koła, na którego okręgu odcięto łuk AMC; promień koła jest R; B jest to punkt na przedłużeniu promienia OA; BC — styczna do łuku AMC; CD — prostopadła do promienia OA. Figura obraca się dokoła osi OB. Znaleźć odległość OD, jeżeli powierzchnia bryły, utworzonej przez obrót łuku AMC, dzieli na 2 części równoważne objętość bryły, utworzonej przez obrót trójkąta OCB.

458. AMC, CND i DPB są to kolejno po sobie następujące trzecie części półkola o średnicy AB i środku O. Przeprowadzono promienie OC i OD oraz cięciwy AC i AD. Figura obraca się dokoła średnicy AB. Dowieść, że objętości brył, otrzymanych przez obrót figur $ACND$ i $OCND$, są równe, a każda jest połową objętości kuli.

459. $ACMDB$ jest ćwiartką koła o promieniu R; łuki AC i BD są równe, łuk zaś $CMD = 60^0$. Znaleźć objętość i po-

wierzchnię bryły, powstałej z obrotu odcinka CMD dokoła promienia OB (lub OA).

460. Odcinek koła obraca się dokoła średnicy, równoległej do cięciwy. Dowieść, że objętość bryły, powstałej z tego obrotu, równa się objętości kuli o średnicy, równej cięciwie odcinka.

461. W półkolu o promieniu R przeprowadzone są równoległe do średnicy 2 cięciwy, którym odpowiadają łuki 150^0 i 30^0. Część półkola, zawarta pomiędzy temi cięciwami, obraca się dokoła średnicy. Znaleźć powierzchnię i objętość otrzymanej bryły.

462. a) AOB jest ćwiartką koła, w którem środkiem jest punkt O, promień zaś równa się R; AMC jest to łuk, zawierający 60^0; AD — styczna, punkt D jest punktem przecięcia stycznej z przedłużeniem promienia OC. Figura, której obwód składają: proste AD i CD i łuk AMC, obraca się dokoła promienia OB. Znaleźć objętość i powierzchnię otrzymanej bryły.

b) W zadaniu poprzedniem przyjąć łuk $AMC = 45^0$.

463. AB jest średnicą półkola, mającego środek w punkcie O. OMC jest to promień, prostopadły do średnicy AB, mający środek w punkcie M; DME jest cięciwą, równoległą do AB; przez punkt C przeprowadzono styczną, a przez punkty D i E prostopadłe do średnicy, przecinające ją w punktach K i L, styczną zaś w punktach F i G. Figura obraca się dokoła średnicy AB. Dowieść, że objętość bryły, utworzonej przez obrót prostokąta $EDKL$, równa się objętości bryły, utworzonej przez obrót figury, której obwód składają: proste FG, FD, GE i łuk DCE.

3. Kula opisana i wpisana.

464. Jaki jest stosunek wzajemny powierzchni 3 kul, z których pierwsza jest styczną do ścian sześcianu, druga jest styczną do jego krawędzi, a trzecia przechodzi przez wierzchołki tegoż sześcianu.

465. Wymiary prostopadłościanu mają się do siebie, jak $1 : 2 : 4$. Jaki jest stosunek powierzchni tego prostopadłościanu do powierzchni kuli, opisanej na nim?

466. Dowieść, że o ile dany odcinek podzielimy w stosunku średnim i skrajnym i za wymiary prostopadłościanu przyjmiemy

cały odcinek i jego części, to promieniem kuli opisanej na tym równoległościanie będzie większa część danego odcinka.

467. Na kuli opisany jest równoległościan prosty, w którym przekątne podstawy równają się a i b. Znaleźć powierzchnię całkowitą tego równoległościanu i promień kuli opisanej.

468. Na graniastosłupie trójkątnym foremnym, w którym wysokość jest dwa razy większa od boku podstawy, opisana jest kula. W jakim stosunku pozostaje objętość kuli do objętości graniastosłupa?

469. Na kuli opisany jest graniastosłup trójkątny foremny, a na nim opisana jest kula. Jaki jest stosunek wzajemny powierzchni tych 2 kul?

470. Promień kuli, opisanej na graniastosłupie trójkątnym foremnym, równa się wysokości graniastosłupa. W ten sam graniastosłup wpisany jest walec. Jaki jest stosunek objętości walca do objętości kuli?

471. Na kuli o promieniu R opisany jest graniastosłup sześciokątny foremny. Znaleźć jego powierzchnię całkowitą.

472. W kulę o promieniu R wpisany jest czworokątny graniastosłup foremny, którego krawędź boczna równa się promieniowi kuli. Znaleźć objętość tego graniastosłupa.

473. Znaleźć promień kuli, opisanej na graniastosłupie dwunastokątnym foremnym, którego bok podstawy równa się a, a wysokość równa jest średnicy podstawy.

474. Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt równoramienny, w którym każde z ramion ma po 5 dm. długości, a bok trzeci = 6 dm.; wysokość graniastosłupa równa się 15 dm. Znaleźć promień kuli, opisanej na tym graniastosłupie.

475. a) Mając krawędź a czworościanu foremnego, znaleźć promienie kul opisanej i wpisanej.

b) Jaki jest stosunek wzajemny powierzchni 3 kul, z których pierwsza jest styczną do ścian czworościanu foremnego, druga jest styczna do jego krawędzi, trzecia zaś przechodzi przez wierzchołki tegoż czworościanu?

476. Mając krawędź a ośmiościanu foremnego, znaleźć promienie kul opisanej i wpisanej.

477. a) Znaleźć promień kuli, wpisanej w ostrosłup foremny, którego wysokość $= h$, a kąt dwuścienny przy podstawie $= 60^0$.

b) W zadaniu poprzedniem na wartość kąta dwuściennego położyć 45^0.

478. Każda z krawędzi ostrosłupa danego równa się 9 cm., wysokość zaś wynosi 5 cm. Znaleźć promień kuli, na nim opisanej.

479. Na kuli o promieniu R opisany jest foremny czworokątny ostrosłup ścięty, w którym kąt dwuścienny przy podstawie $= 45^0$. Znaleźć jego powierzchnię całkowitą.

480. W kulę o promieniu R wpisany jest foremny sześciokątny ostrosłup ścięty, którego płaszczyzna podstawy dolnej przechodzi przez środek kuli, boczna zaś krawędź tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 60^0. Znaleźć jego objętość.

481. W koło wpisany jest kwadrat i przez jego wierzchołki przeprowadzone są boki kwadratu opisanego. Obydwa kwadraty i koło wirują dokoła przekątnej kwadratu wpisanego. Jaki jest stosunek wzajemny objętości otrzymanych brył?

482. W walec równoboczny wpisany jest stożek podwójny o jednakowych tworzących, a w ten stożek wpisana jest kula. Ile razy większa jest całkowita powierzchnia walca od powierzchni kuli?

483*. Dowieść, że, jeżeli opisać na kuli lub wpisać w nią stożek równoboczny i walec równoboczny, to w obu tych wypadkach powierzchnia całkowita walca będzie średnią proporcjonalną pomiędzy powierzchnią całkowitą stożka a powierzchnią kuli, oraz że objętość tegoż walca będzie średnią proporcjonalną pomiędzy objętością stożka a objętością kuli.

484. W kulę wpisany jest walec, w którym promień podstawy tak się ma do wysokości, jak $m : n$. Znaleźć powierzchnię całkowitą tego walca, jeżeli powierzchnia kuli $= S$.

485. Bryła składa się z walca równobocznego, na którego górnej podstawie zbudowany jest stożek równoboczny; średnica podstawy walca $= a$. Na tej bryle opisana jest kula (jej powierzchnia przechodzi przez okrąg podstawy walca i przez wierzchołek stożka). Znaleźć promień kuli i wyznaczyć stosunek powierzchni danej bryły do powierzchni kuli.

486. W stożek, którego wysokość równa się średnicy podstawy, wpisany jest walec równoboczny, a w ten walec wpisana jest kula. Ile razy większa jest objętość stożka od objętości kuli?

487. Znaleźć powierzchnię kuli, opisanej na stożku, w którym promień podstawy $= r$, wysokość zaś $= h$.

488. W stożek, w którym promień podstawy $= r$, a tworząca $= l$, wpisana jest kula. Wyznaczyć długość linji styczności kuli i stożka.

489. Znaleźć objętość stożka, jeżeli promień podstawy $= 6$ c., a promień kuli wpisanej $= 3$ c.

490. Dowieść, że jeżeli na kuli opisany jest stożek, którego wysokość jest 2 razy większa od średnicy kuli, to objętość i powierzchnia całkowita stożka jest dwa razy większa od objętości i powierzchni kuli.

491. Na kuli o promieniu R opisany jest stożek, mający kąt prosty przy wierzchołku. Znaleźć powierzchnię całkowitą tego stożka.

492. Koło wielkie kuli jest podstawą wpisanego w tę kulę stożka ściętego, którego wysokość wynosi 0,6 promienia kuli. Jaki jest stosunek wzajemny objętości i powierzchni tych brył?

493. Na kuli opisany jest stożek ścięty, w którym tworząca tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 45^0. Dowieść, że powierzchnia boczna stożka jest dwa razy większa od powierzchni kuli.

494. Znaleźć powierzchnię boczną i objętość stożka ściętego, opisanego na kuli, jeżeli tworząca $= 13$ cm., promień zaś kuli ma 6 cm. długości.

495. Mając promień kuli R, znaleźć promień podstawy walca wpisanego, którego powierzchnia boczna jest m razy większa od powierzchni odpowiadającego mu pasa kulistego.

496. Powierzchnia całkowita odcinka kuli jest m razy większa od powierzchni wpisanej w ten odcinek kuli. Znaleźć wysokość tego odcinka, mając promień R jego powierzchni kulistej ($m = 2$).

497. W kulę o promieniu R wpisany jest stożek o takiej wysokości, że jego powierzchnia boczna jest równa powierzchni przyległego do niej odcinka kuli. Znaleźć wysokość stożka.

498. Objętość danego odcinka kuli jest m razy większa od objętości wpisanej weń kuli. Znaleźć wysokość tego odcinka, mając promień R powierzchni kulistej odcinka ($m = 2$).

499. W kulę o promieniu R wpisany jest stożek o takiej wysokości, że jego objętość jest równa objętości przyległego odcinka kuli. Znaleźć wysokość stożka.

500. Mając promień kuli R, wyznaczyć odległość pomiędzy środkiem kuli a podstawą wpisanego w nią walca, którego objętość równa się połowie objętości odpowiadającej mu warstwy kulistej.

Dział ogólny.

501. Przekątne równoległościanu prostego równają się 9 cm. i $\sqrt{33}$ cm., obwód jego podstawy wynosi 18 cm., a krawędź boczna ma 4 cm. długości. Znaleźć powierzchnię całkowitą i objętość tego równoległościanu.

502. W kulę o promieniu R wpisany jest sześcian i na jego ścianach zbudowane są ostrosłupy foremne, których wierzchołki znajdują się na powierzchni kuli. Znaleźć objętość powstałej bryły graniastej, oraz wyznaczyć stosunek jej objętości do objętości kuli.

503. Powierzchnia całkowita stożka podzielona jest na 2 części równe przecięciem, równoległem do podstawy. Znaleźć górny odcinek tworzącej, jeżeli promień podstawy $= R$, a tworząca $= l$ $(R = 1;\ l = 8)$.

504. Na kuli opisany jest foremny czworokątny ostrosłup ścięty, którego boki podstaw mają się do siebie, jak $m : n$. Wyznaczyć stosunek objętości ostrosłupa do objętości kuli.

505. Udowodnić zapomocą obliczenia i bez obliczenia, że jeżeli w graniastosłupie czworokątnym foremnym krawędź boczna równa się $^1/_2$ przekątnej podstawy, to powierzchnia całkowita tego graniastosłupa jest równoważna ośmiokątowi foremnemu, zbudowanemu na boku podstawy graniastosłupa.

506. W równoległościanie prostym punkt przecięcia jego przekątnych odległy jest od płaszczyzny podstawy o 3 cm., a od ścian bocznych o 2 cm. i 4 cm., obwód podstawy wynosi 30 cm. Znaleźć powierzchnię całkowitą i objętość równoległościanu.

507. W walec równoboczny wpisany jest ośmiościan foremny [1]), w ten zaś ostatni wpisana jest kula. W jakim stosunku pozostaje powierzchnia całkowita walca do powierzchni kuli?

[1]) Oś walca jest jedną z osi ośmiościanu.

508. Dowieść, że jeżeli płaszczyzna, przechodząca przez przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego, tworzy z przyprostokątnemi kąty równe 30^0 i 45^0, to z płaszczyzną trójkąta tworzy kąt 60^0.

509. Na kuli o promieniu R opisany jest stożek ścięty, którego objętość jest m razy większa od objętości kuli. Znaleźć promienie jego podstaw.

510. Dowieść, że jeżeli przekątna prostopadłościanu tworzy z dwiema krawędziami kąty po 60^0, to z trzecią krawędzią tworzy kąt 45^0.

511. Powierzchnia kuli, wpisanej w stożek, jest równoważna jego podstawie. Wyznaczyć: a) w jakim stosunku pozostaje powierzchnia tej kuli do powierzchni bocznej stożka; b) jakiej części objętości stożka równa jest objętość kuli.

512. Znaleźć objętość ostrosłupa czworokątnego foremnego, mając jego krawędź boczną, równą b, i kąt płaski przy wierzchołku, równy 36^0.

513. Jaki jest stosunek objętości stożka, opisanego na czworościanie foremnym, do objętości kuli, wpisanej w ten czworościan?

514. Podstawą ostrosłupa jest romb, w którym bok $= 25$ dm. i mniejsza przekątna $= 30$ dm. Wysokość ostrosłupa przechodzi przez wierzchołek kąta rozwartego podstawy i równa się 32 dm. Obliczyć powierzchnię całkowitą tego ostrosłupa.

515. Sierp, zawarty pomiędzy półkolem a łukiem, zawierającym 120^0, wiruje dokoła prostej, łączącej środki łuków. Znaleźć powierzchnię i objętość bryły, powstałej z obrotu, mając cięciwę sierpa, równą a.

516. W stożek równoboczny wpisana jest półkula w ten sposób, że koło wielkie półkuli znajduje się na płaszczyźnie podstawy stożka. W jakim stosunku dzieli okrąg styczności powierzchnię boczną półkuli i powierzchnię boczną stożka?

517. Ośmiokąt foremny wiruje dokoła swej średnicy. Znaleźć objętość i powierzchnię bryły, powstałej z obrotu, wiedząc, że promień ośmiokąta $= R$.

518*. Mając bok a ośmiokąta foremnego, znaleźć objętość i powierzchnię bryły, powstałej z obrotu tego ośmiokąta dokoła jego apotemy.

519*. Mając bok a ośmiokąta foremnego, znaleźć objętość i powierzchnię bryły, powstałej z obrotu tego ośmiokąta dokoła swego boku.

520. W stożek równoboczny o tworzącej a wpisana jest kula, w nią zaś wpisany jest sześcian. Znaleźć krawędź sześcianu.

521. Krawędź boczna graniastosłupa trójkątnego foremnego równa się bokowi a podstawy. Znaleźć pole płaszczyzny przecięcia, przechodzącej przez bok podstawy pod kątem 60^0 do płaszczyzny podstawy.

522. W czworościanie foremnym połączone są ze sobą środki ścian bocznych. Wyznaczyć, ile razy jest mniejszy otrzymany trójkąt od podstawy.

523. W wycinek kuli, którego kąt środkowy równa się 120^0, wpisany jest stożek równoboczny w ten sposób, że jego wierzchołek znajduje się na powierzchni kulistej wycinka, a podstawa opiera się na powierzchni stożkowej. Jaki jest stosunek objętości stożka do objętości wycinka?

524. Romb obraca się dokoła osi, prostopadłej do jego boku i spuszczonej z wierzchołka kąta ostrego. Obliczyć powierzchnię bryły, powstałej z obrotu, jeżeli większa przekątna rombu $= l$.

525. Sieczna ACD, przechodząca przez środek koła, równa się 40 c., styczna $AB = 23$ c. Znaleźć objętość i powierzchnię bryły, powstałej z obrotu figury, której obwód składają: proste AB i AD oraz łuk BMD, dokoła osi AD.

526. Na kuli o promieniu r opisany jest stożek, którego powierzchnia boczna ma się do powierzchni kuli, jak $3:2$. Znaleźć promień podstawy stożka.

527. Przez środek podstawy ostrosłupa trójkątnego foremnego przeprowadzona jest płaszczyzna, równoległa do boku podstawy i przeciwległej krawędzi bocznej. Obliczyć pole otrzymanego przecięcia, jeżeli bok podstawy $= a$, a krawędź boczna $= b$.

528. Na kuli o promieniu ρ opisany jest stożek ścięty, którego tworząca $= l$. Dowieść, że powierzchnia boczna stożka $= \pi l^2$, a powierzchnia całkowita równa się $2\pi l^2 - 2\pi\rho^2$.

529. Na kuli o powierzchni π st.^{2} opisany jest stożek ścięty, którego powierzchnia boczna $= 169\pi$ c.^{2}. Znaleźć objętość stożka (ściętego).

530. W ostrosłup trójkątny foremny, w którym krawędzie boczne są do siebie prostopadłe, a bok podstawy równa się a, wpisana jest kula. Znaleźć promień tej kuli.

531. W równoległościanie prostym mniejsza przekątna równa się większej przekątnej podstawy. Przez pierwszą z nich przeprowadzona jest równolegle do drugiej przekątnej płaszczyzna. Znaleźć pole otrzymanego przecięcia, wiedząc, że boki podstawy równają się a i b, a długość krawędzi bocznej jest c.

532. W kulę o promieniu R wpisany jest walec równoboczny. Na jakie cztery części powierzchnia walca podzieliła objętość kuli?

533. Trójkąt, którego pole równa się 36 c.^{2}, obraca się dokoła jednego ze swych boków. Objętość otrzymanej bryły równa się 192π cm.^{3}, powierzchnia zaś jej wynosi 216π cm.^{2}. Odnaleźć boki trójkąta i wskazać, który z nich był osią obrotu.

534. W ostrosłupie foremnym czworokątnym ściętym boki podstaw równają się a i b, wysokość zaś wynosi h. Znaleźć objętość części ostrosłupa, zawartej pomiędzy ścianą boczną a równoległą do niej płaszczyzną, przeprowadzoną przez jeden z boków podstawy górnej.

535. Trójkąt, w którym boki mają się do siebie, jak $13:14:15$, obraca się dokoła swego średniego co do wielkości boku. W otrzymany stożek podwójny wpisana jest kula. W jakim stosunku pozostaje objętość kuli do objętości stożka podwójnego?

536. W ostrosłupie czworokątnym foremnym $SABCD$ przeprowadzona jest płaszczyzna przez punkt A i środek krawędzi SC równolegle do przekątnej podstawy BD. Obliczyć pole otrzymanego przecięcia, mając bok podstawy a i wysokość h ostrosłupa.

537. Znaleźć objętość ostrosłupa trójkątnego foremnego, mając jego wysokość h, spuszczoną na płaszczyznę podstawy, oraz wysokość h_1, spuszczoną na jedną ze ścian bocznych.

538. Prostokąt, którego boki równają się a i b, zgięty jest wzdłuż przekątnej w ten sposób, że płaszczyzny trójkątów tworzą prosty kąt dwuścienny. Znaleźć odległość pomiędzy wierzchołkami prostokąta, nie znajdującemi się na krawędzi kąta dwuściennego.

539. W ostrosłupie czworokątnym foremnym promień koła, opisanego na podstawie, równa się 4 cm., promień zaś koła, opisanego na ścianie bocznej = 3 cm. Znaleźć objętość i powierzchnię boczną ostrosłupa oraz kąt dwuścienny przy jego podstawie.

540. W ostrosłupie czworokątnym foremnym promienie kół, wpisanych w podstawę i ścianę boczną, równają się odpowiednio 6 cm. i 3 cm. Znaleźć powierzchnię całkowitą i objętość ostrosłupa.

541. V, V_1 i V_2 są to objętości brył, powstałych z obrotu kolejnego trójkąta prostokątnego dokoła jego przeciwprostokątnej i przyprostokątnych. Dowieść, że $\frac{1}{V^2} = \frac{1}{V_1^{\,2}} + \frac{1}{V_2^{\,2}}$.

542. Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt prostokątny ABC, w którym przeciwprostokątna $AB = c$, a jeden z kątów ostrych wynosi 15^0. Jeżeli ściany boczne C_1CAA_1 i C_1CBB_1 rozgiąć w ten sposób, żeby utworzyły jedną płaszczyznę, i na tej płaszczyźnie przeprowadzić linje C_1A i C_1B, wtedy te dwie linje utworzą kąt prosty. Znaleźć objętość i powierzchnię boczną graniastosłupa.

543. W stożek wpisany jest szereg kul, z których pierwsza jest styczna do podstawy i powierzchni bocznej, każda zaś z następnych jest styczna do poprzedniej kuli i powierzchni bocznej. Wysokość stożka = 8 cm., promień podstawy = 6 cm. Do jakiej granicy dąży suma objętości kul wpisanych, jeżeli liczbę ich będziemy powiększać nieskończenie.

544. W sześcian o krawędzi a wprawiono kulę w ten sposób, że jej powierzchnia jest styczna do wszystkich krawędzi sześcianu. Znaleźć objętość części kuli, znajdującej się wewnątrz sześcianu.

545. Z punktu, znajdującego się na płaszczyźnie podstawy górnej graniastosłupa, przeprowadzone są proste przez środki krawędzi bocznych do przecięcia tych prostych z przedłużoną płaszczyzną podstawy dolnej. Przeprowadzone proste są krawędziami bocznemi ostrosłupa. Znaleźć stosunek objętości ostrosłupa do objętości graniastosłupa.

546. Znaleźć objętość soczewki dwuwypukłej, jeżeli promienie obu jej powierzchni równają się 10 cm. i 17 cm., a odległość pomiędzy ich środkami wynosi 21 cm.

547. W stożek, ustawiony wierzchołkiem na dół, wrzucono kulę; powierzchnia kuli jest równoważna podstawie stożka, objętość zaś jej jest n razy mniejsza od objętości stożka. Mając wysokość stożka H, wyznaczyć odległość pomiędzy jego wierzchołkiem a środkiem kuli.

548. Stożek o promieniu podstawy R i tworzącej l odwrócono do góry podstawą i wrzucono weń kulę, której promień $= r$. Wyznaczyć: 1) odległość środka kuli od wierzchołka stożka; 2) promień okręgu styczności; 3) część powierzchni kuli, widzialną z wierzchołka stożka.

549. W graniastosłupie czworokątnym foremnym bok podstawy $= a$, krawędź zaś boczna $= 4\,a$. Znaleźć pole płaszczyzny przecięcia, przechodzącej przez przekątną graniastosłupa, równolegle do przekątnej podstawy.

550. Ostrosłup 4-kątny foremny ścięty i równoważny mu graniastosłup 4-kątny foremny zbudowane są w ten sposób, że środki ich podstaw przystają do siebie, a krawędzie boczne wzajemnie się przecinają. Boki podstaw ostrosłupa ściętego równają się 2 m. i 11 m. Znaleźć bok podstawy graniastosłupa i dowiedzieć się, w jakim stosunku podzielone są (licząc z góry) krawędzie boczne w punktach przecięcia, oraz w jakim stosunku linja przecięcia powierzchni bocznych dzieli te powierzchnie.

551. W kulę wpisano stożek w ten sposób, że jego wysokość została podzielona przez środek kuli w stosunku skrajnym i średnim. Wyznaczyć, ile razy objętość kuli jest większa od objętości stożka.

552*. Mając bok a dziesięciokąta foremnego, znaleźć objętość bryły, powstałej z wirowania dziesięciokąta dokoła jego średnicy.

553*. Dwunastokąt foremny, którego bok równa się a, wiruje dokoła swej średnicy. Znaleźć powierzchnię i objętość bryły, powstałej z tego wirowania.

554*. Dwunastokąt foremny, którego bok równa się a, wiruje dokoła swej apotemy. Znaleźć objętość i powierzchnię bryły, powstałej przez wirowanie.

555*. W pięciokącie foremnym przeprowadzone są dwie przecinające się przekątne. Jedną z nich, jak również jej odcinki przyjęto za wymiary prostopadłościanu. Obliczyć objętość i przekątną prostopadłościanu, wiedząc, że bok pięciokąta równa się a.

556. W trapezie $ABCD$ bok BC jest równoległy do boku AD, kąt $BAD = 60^\circ$, $AB = 8$ cm., $AD = 5$ cm. i $BC = CD$. Znaleźć objętość i powierzchnię bryły, powstałej z obrotu trapezu dokoła boku AD.

557. Dwa stożki mają wysokości równe; rozwijając powierzchnię boczną pierwszego, otrzymujemy wycinek koła, zawierający m^0, rozwijając zaś powierzchnię boczną drugiego, otrzymujemy wycinek koła, zawierający n^0. Jaki jest stosunek wzajemny objętości obu stożków?

558. Znaleźć objętość ostrosłupa trójkątnego, w którym jedna z krawędzi $= a$, a każda z pozostałych $= b$.

559. W sześcian o krawędzi a wpisany jest walec równoboczny w ten sposób, że oś jego znajduje się na przekątnej sześcianu, a okręgi podstaw są styczne do ścian sześcianu. Wyznaczyć wysokość sześcianu.

560. W stożek, w którym promień podstawy ma się do wysokości, jak $3 : 4$, wpisana jest kula. W jakim stosunku okrąg styczności dzieli powierzchnię boczną stożka i powierzchnię kuli wpisanej?

561. Cztery jednakowe kule, każda o promieniu r, są ustawione w ten sposób, że każda z nich jest styczna do trzech pozostałych. Znaleźć promień kuli, którąby objęła ten układ kul.

562. A i B są to punkty, znajdujące się na dwóch ścianach kąta dwuściennego; AC i BD są linje prostopadłe do krawędzi. $AB = 20$; $AC = BD = 14$, $CD = 10$. Wyznaczyć najkrótszą odległość pomiędzy prostemi AB i CD oraz kąt, przez nie utworzony.

563. Mamy szereg nieskończony czworościanów foremnych, z których każdy następny ma wierzchołki w środkach ścian poprzedniego. Jaki jest stosunek granicy sumy objętości wszystkich czworościanów do objętości największego z nich?

564. W foremnym czworokątnym ostrosłupie ściętym przeprowadzona jest płaszczyzna przez jego dwa wierzchołki przeciwległe równolegle do przekątnej podstawy. Obliczyć pole otrzymanego przecięcia, wiedząc, że wysokość ostrosłupa ściętego równa się h, a boki podstawy równają się a i b.

565. Wspólna styczna wewnętrzna do dwóch kół na zewnątrz stycznych posiada długość a. Obliczyć powierzchnię, którą zakreśli styczna, krążąc dookoła linji, łączącej środki kół.

566. W graniastosłupie foremnym trójkątnym $ABCA_1B_1C_1$ prostopadła, spuszczona z wierzchołka C na płaszczyznę ABC_1 przecina krawędź A_1B_1; ściany ABC i AA_1B_1B tworzą kąt 75^0; krawędź $AB = a$; pole $AA_1B_1B = Q$. Znaleźć objętość graniastosłupa.

567. W sześcian o krawędzi a wpisany jest stożek równoboczny, w ten sposób, że jego wierzchołek znajduje się w jednym z wierzchołków sześcianu, okrąg zaś podstawy dotyka trzech ścian, mających wierzchołek wspólny, przeciwległy do wierzchołka stożka. Znaleźć promień podstawy stożka.

568. Wiedząc, że w ostrosłupie trójkątnym dwie krawędzie mają po 4 dm. długości, pozostałe zaś po 3 dm., wykazać, czemu się może równać objętość tego ostrosłupa.

569. Każda z ośmiu kul jednakowych, których środki są wierzchołkami urojonego sześcianu, dotyka 3 przyległych do niej kul. Przeprowadzone są jeszcze dwie powierzchnie kuliste: pierwsza z nich dotyka wszystkich kul, obejmując je; druga zaś dotyka wszystkich kul, znajdując się wewnątrz ich układu. Jaki jest stosunek objętości, zawartej pomiędzy dwiema powierzchniami kulistemi, do sumy objętości wszystkich kul danych?

570. W jakim stosunku powierzchnia półkuli zbudowanej na podstawie stożka równobocznego dzieli jego objętość?

571. W dwa przeciwległe kąty trójścienne sześcianu wpisane są dwie jednakowe kule, których wielkość promieni jest taka, że obie kule stykają się z sobą. Znaleźć promień kul, jeżeli krawędź sześcianu równa się a.

572. W ostrosłupie trójkątnym wysokości ścian bocznych mają każda po 15 c. długości, pola zaś ich równają się $262^1/_2$ c.^{2}, $217^1/_2$ c.^{2} i 360 c.^{2}. Obliczyć powierzchnię całkowitą, objętość i krawędzie boczne ostrosłupa.

573 Znaleźć objętość ostrosłupa czworokątnego foremnego, w którym bok podstawy $= a$, kąt zaś dwuścienny pomiędzy ścianami bocznemi równa się 120^0.

574. Obliczyć objętość warstwy kulistej, mając jej wysokość h i promień przecięcia środkowego [1]) ρ.

[1]) T. j. przecięcia, przeprowadzonego równolegle do podstawy przez środek wysokości.

575. AM i MB są to średnice dwóch na zewnątrz stycznych okręgów, których promienie równają się R i r; CD jest wspólna styczna zewnętrzna do obu okręgów. Figura ta obraca się dokoła osi AMB. Wyznaczyć wielkość powierzchni, utworzonej przez obrót linji $ACDB$, składającej się z łuku AC, prostej CD i łuku DB.

576. Z dwóch punktów na płaszczyźnie, pomiędzy któremi odległość równa się a, wyprowadzono dwie proste równoległe pod kątem 45^0 do płaszczyzny. Wyznaczyć odległość pomiędzy temi prostemi, jeżeli odległość pomiędzy ich rzutami na płaszczyznę równa się b.

577*. Ścianami równoległościanu są jednakowe romby, przyczem przy jednym wierzchołku schodzą się trzy kąty ostre. Znaleźć objętość tego równoległościanu, mając przekątne a i b jego ściany ($a \angle b$).

578*. W ostrokątnym trójkącie równoramiennym połączono środki boków i z powstałych czterech trójkątów utworzono ostrosłup (trójkąty zewnętrzne przegięto do wewnątrz w ten sposób, że wierzchołki trójkąta równoramiennego się zeszły). Znaleźć objętość tego ostrosłupa, wiedząc, że podstawa trójkąta $= a$, każdy zaś z boków równych równa się b ($a = 4$; $b = 3$).

579. W stożek o tworzącej l i promieniu podstawy R wpisana jest kula; w stożku tym przeprowadzono płaszczyznę sieczną, styczną do kuli wpisanej, równolegle do podstawy. Jaki jest stosunek objętości odcinka górnego do objętości całego stożka?

580. Podstawą ostrosłupa jest kwadrat. Z czterech kątów dwuściennych przy podstawie dwa kąty przeciwległe mają po 60^0, trzeci zaś $= 30^0$. Dowieść, że kąt czwarty równa się 120^0.

581*. W kulę wpisany jest czworościan foremny. W jakim stosunku podzielona została objętość kuli płaszczyzną ściany czworościanu?

582*. W graniastosłupie pięciokątnym foremnym bok podstawy równa się a, boczna zaś krawędź równa się odległości pomiędzy bokiem podstawy a punktem, w którym się przecinają przekątne, przeprowadzone od tego boku do przyległych. Znaleźć objętość graniastosłupa.

583*. Krawędzie boczne ostrosłupa trójkątnego są do siebie prostopadłe i równają się: 1 saż., 2 saż. i 3 saż. Wyznaczyć wysokość ostrosłupa.

584*. Z punktu A, znajdującego się wewnątrz kąta dwuściennego, spuszczona jest prostopadła AB na krawędź kąta, i prostopadłe AC i AD do ścian kąta. Wyznaczyć odległość pomiędzy punktami C i D, wiedząc, że $AB = 25$, $AC = 7$ i $AD = 20$.

585. Odcinek AB, równy a, jest bokiem dwunastokąta foremnego, AM zaś jest jego średnicą. Przekątną MB przedłużono do przecięcia w punkcie C z linją AC, prostopadłą do MA. Trójkąt ABC, przegięty pod kątem prostym do płaszczyzny dwunastokąta, jest ścianą boczną ostrosłupa, dany zaś dwunastokąt foremny jest jego podstawą. Znaleźć objętość ostrosłupa.

586. Na kole wielkiem kuli o promieniu R zbudowano stożek ścięty wpisany, w który można wpisać kulę. Znaleźć tworzącą stożka i wysokość pasa kulistego, równoważnego powierzchni bocznej stożka.

587. Jeden z wierzchołków sześcianu oraz środki trzech do wierzchołka tego nieprzyległych ścian są wierzchołkami wpisanego w sześcian ostrosłupa trójkątnego foremnego. Znaleźć objętość ostrosłupa, wiedząc, że krawędź sześcianu $= a$.

588. Z punktu A, znajdującego się ponad płaszczyzną, przeprowadzone są do niej trzy proste: AB, tworząca z płaszczyzną kąt 30^0, i dwie proste jednakowe AC i AD, prostopadłe do AB. Wyznaczyć odległość CD, wiedząc, że $AB = 12$ m., AC zaś $= AD = 13$ m.

589. W trójkącie przeprowadzona jest dwusieczna kąta, znajdującego się pomiędzy bokami a i b. Figura obraca się dokoła boku a. Znaleźć stosunek wzajemny objętości, powstałych z obrotu części trójkąta, przyległych do boków a i b.

590*. Podstawą ostrosłupa jest równoległobok. Przez jeden z jego boków przeprowadzona jest płaszczyzna, dzieląca objętość ostrosłupa na dwie części równoważne. Na jakie części dzieli płaszczyzna przebijające ją krawędzie boczne?

591*. Kąty płaskie kąta trójściennego są proste. Z wierzchołka tego kąta promieniem R opisano wewnątrz kąta powierzchnię kulistą i w otrzymaną bryłę wpisano kulę. Znaleźć promień kuli.

592*. Pola podstaw ostrosłupa ściętego równają się B i b. W jakim stosunku (licząc od podstawy górnej) została podzielona objętość ostrosłupa przez płaszczyznę przecięcia środkowego?

593*. Wysokość ostrosłupa ściętego równa się h; odpowiednie boki obu podstaw mają się do siebie, jak $m : n$ ($m > n$). Wyznaczyć położenie równoległej do podstaw płaszczyzny, dzielącej objętość ostrosłupa na dwie części równoważne.

594*. Mając krawędź a dwunastościanu foremnego, znaleźć promień opisanej na nim kuli, wpisanej weń kuli, jego objętość i powierzchnię.

595*. Mając krawędź a dwudziestościanu foremnego, znaleźć promień wpisanej i opisanej kuli, jego powierzchnię i objętość.

596*. Znaleźć wzór do objętości wielokątnego ostrosłupa ściętego, dzieląc ten ostrosłup na trójkątne ostrosłupy ścięte.

ODPOWIEDZI.

1. $\sqrt{f^2+g^2-2h^2}$. **2.** 6 st. 5 c. **3.** a) $\sqrt{a^2+\frac{Q}{\pi}}$. b) $\sqrt{313} = 17{,}7$ m.; 13 m. **4.** 8 cm. **5.** 15 cm. **6.** a) $\sqrt{b^2+\frac{a^2}{2}}$; b) o 1 dm. **7.** $6\frac{1}{2}$ c. **8.** a) $\sqrt{f^2-a^2}$; b) 37 m.; c) 17 c. **9.** $3\frac{1}{2}$ cm^2. **10.** a) 288 cm.^{2}; b) 24 st.^{2}. *Wskazówka:* Niech będzie $BD \perp M$. Prowadzimy $DE \perp AC$ i łączymy B z E. **11.** $\sqrt{2b^2-a^2}$. **12.** a) 56; b) 20. **13.** $BE = 18$ m.; $CE = 12$ m. **14.** a) 26 dm.; b) 117 c. **15.** 10,5 cm. **16.** o 36 c. lub o 44 c. **17.** $\frac{ab}{a+b}$. **18.** 1,2 m. **19.** 3 c. *Wskazówka:* Przeprowadzić $FG \perp AB$ i połączyć G z D. **20.** 1 arsz. **21.** $\frac{a(b+c)}{b}$. **22.** $3\frac{1}{2}$ c. **23.** 19 cm. i 17 cm. **24.** 25 m. lub 39 m. **25.** $\sqrt{c^2-b^2+a^2}$. *Wskazówka:* Przeprowadzić $BE \perp M$ i połączyć E z C i z D. **26.** 8 c. *Wskazówka:* Prowadzimy $AE \perp M$ i $BF \perp M$, następnie zaś przeprowadzamy linje EF, CE i DF. **27.** a) 120 m.; b) 45 c. **28.** a) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; b) 25. **29.** $\frac{d}{h}\sqrt{h^2+\frac{a^2}{3}}$; $\frac{a(d+h)}{h}$. **30.** a) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; b) $\frac{a}{2}$; c) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; **31.** a) $2h$; b) $h\sqrt{2}$; c) $\frac{2h}{\sqrt{3}}$; d) $h(\sqrt{5}+1)$. **32.** $2a$. **33.** a) $a\sqrt{2}$. b) $a\sqrt{6}$. **34.** $3a$. **35.** 115^0 lub 35^0. **36.** $a(\sqrt{3}+1)$. **38.** *Wskazówka:* Przeprowadziwszy $BD \perp M$ i $DE \perp AC$, łączymy D z E. **39.** $\sqrt{a^2+b^2}$. **40.** 10 cm. **42.** 30^0. **43.** a) 110^0; b) $2a$. **44.** a) 7 dm.

Wskazówka: Przeprowadzić $CE \parallel AB$ i $BE \perp AB$ i połączyć E z D. b) $2a$; 4. **45.** 5 dm. **46.** 13 c. **47.** a) 3,36 c. b) 4. **48.** $2a$ **49.** 109 m. **50.** a) $AB = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$; rzut na płaszczyznę $A = \sqrt{a^2+c^2}$; rzut na pł. $B = \sqrt{b^2+c^2}$; b) $\frac{a}{2}$. **51.** 7,3 c. **52.** 14,4. *Wskazówka:* Przeprowadzić wysokości DE i BE. **53.** 1) a) nie; b) tak; c) nie; d) nie; e) nie; 2) a) nie; b) nie; c) tak. **54.** $55^0 \leqq x \leqq 95^0$. **55.** a) $\frac{a}{2}\sqrt{2}$. **57.** a) $a\sqrt{3}$; $a^2\sqrt{2}$; b) $m(\sqrt{3}+\sqrt{2})$. **58.** $\frac{a}{3}\sqrt{6}$. **59.** $\frac{a^2}{2}\sqrt{3}$. **60.** a) 241 c.; b) 20 m. i 12 m. **61.** a) 3; b) 7; c) 11; d) 17; e) 29. **62.** $\sqrt{\frac{1}{2}(l^2+m^2+n^2)}$. **63.** a) 13 m. i 9 m.; b) $\sqrt{277} = 16,6$ c. i 15 c. **64.** 8 c. i 10 c. **65.** 5 c. i 7 cm. **66.** $a\sqrt{2}$ i $2a$. **67.** a) 5 c. i 7 c.; b) 4 m. i $\sqrt{12} = 3,46$ m. **68.** a) 2 m.²; b) 40 c. i 9 c. **69.** 2 m.² i 3 m.². **70.** 175 c.² i 273 c.². **71.** 26 m.². **72.** 13 st.². *Wskazówka:* Przeprowadzić $BE \perp AD$ i połączyć E z B_1. **73.** $\frac{Q}{a}$. **74.** $18\frac{1}{2}$ c.². **75.** $\frac{3a^2}{4}\sqrt{3}$. **78.** a) 22 c; b) 9 cm. **80.** 120°. **81.** $Q\sqrt{2}$. **82.** $2a$ i $a\sqrt{5}$; $a^2\sqrt{3}$ i $2a^2$. **83.** $\frac{a^2}{2}$. **84.** 8 c.² i 4 c. **85.** $Q\sqrt{2}$. **86.** $\frac{ab}{2}\sqrt{3}$. **87.** 1 st.². **88.** $3a^2$. **89.** 53°49'. **90.** 12 dm. **91.** 1) a) 29 m.; b) $11\frac{1}{2}$ m.; c) $\sqrt{7\frac{5}{6}} = 2,8$ m. 2) a) $2l^2$; b) $3Q\sqrt{2}$. **92.** a) $10\frac{1}{6}$ st.²; b) 6 m., 14 m. i 16 m. **93.** 124 m.². **94.** $2\sqrt{M^2+2Qh^2}$. **95.** 188 st.². **96.** $9\frac{5}{6}$ st.². **97.** $220 + 24\sqrt{3} = 261,6$ c.²; 70 c.². **98.** 2 st.². **99.** $2\sqrt{M^2+N^2}$. **100.** a) $3ab + \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; b) $4ab+2a^2$; c) $6ab+3a^2\sqrt{3}$. **101.** $32\sqrt{6} + 192 = 270,4$ c.². **102.** Bok podstawy i krawędź boczna równają się 6 c. i 3 c., lub 4 c. i 7 c. *Wskazówka:* Niech krawędź boczna $= b$ i bok podstawy $= a$; wtedy: $2a^2 + b^2 = 81$ i $4ab + 2a^2 = 144$; dodając te równania, otrzymamy: $(2a+b)^2 = 225$ i t. d. **103.** a) 4980 st.²; b) 9 m.² i 1 m. **104.** 34 c., 20 c. i 18 c. *Wskazówka:* Boki podstawy oznaczyć przez $17x$, $10x$, $9x$. **105.** Boki podstawy 25 dm. i 36 dm., krawędź boczna 24 dm. **106.** 906 cm.² i 240 cm.². **107.** $10r^2$. **108.** a) 1 st.²; b) 14 st.². **109.** a) 2 cm.; b) 4 c.². **110.** a) $2a^2 + 2a\sqrt{4b^2-a^2}$; b) b, $\sqrt{b^2+2a^2}$ i $\sqrt{b^2+4a^2}$; $a\sqrt{2b^2+a^2}$ i $ab\sqrt{2}$. **111.** $ab(\sqrt{2}+1)$. **112.** 492 dm.². **113.** a) 15 st., 28 st.; b) 6 cm. **114.** a) $\frac{1}{9}l^3\sqrt{3}$; b) $\frac{S}{6}\sqrt{\frac{S}{6}}$. **115.** a) 3 c.; b) 25 cm. **116.** a) 30 dm.; b) 3 cm. **117.** a) 4500 c.³; b) $\frac{mnQ\sqrt{Q}}{m^2+n^2}$. **118.** $\sqrt{L.M.N}$. **119.** $24\sqrt{5} = 53,7$ cm.³. **120.** 8 c. i 9 c. **121.** 16 c. i 12 c. **122.** $\frac{l^3\sqrt{2}}{8}$. **123.** $\frac{Pab}{4(a+b)}$. **124.** a) 360 c³; b) 36 m.³. **125.** 60 cm.³. **126.** 780 dm.³. **127.** $\sqrt{\frac{Q.M.N}{2}}$. **128.** 525 c.³ i 290 c.². **129.** 10 cm.; 1,44 m.²; $\frac{135}{2}\sqrt{3} = 116,9$ cm.³. **130.** 10 st.³. **131.** a) $\frac{a^2b\sqrt{3}}{4}$; b) a^2b; c) $\frac{3a^2b\sqrt{3}}{2}$. **132.** a) 3 dm.³; b) 32 cm.³ lub $8\sqrt{2} = 11,3$ cm.³. **133.** a) $\frac{a^3}{8}$; b) $Q\sqrt{\frac{Q}{3}}$. **134.** $\frac{9}{4}r^3$. **135.** $\frac{3}{2}a$. **136.** 105 dm.³. **137.** a) 48 c.³; b) 34 dm. i 32 dm. **138.** 12 c.³. **139.** 7320 cm.³. **140.** r^3. **141.** $4r^3$. **142.** $2a^3\sqrt{2+\sqrt{2}}$. **143.** $3r^3$. **144.** $Q\sqrt{Q}$. *Wskazówka:* Użyć przy rozwiązaniu zadania wzoru dla promienia dwunastokąta. **145.** a) i b) $\frac{5}{4}r^3\sqrt{5}$. **146.** a) $\frac{\sqrt{6}}{4}abc$; b) $\frac{\sqrt{6}}{4}abc$; c) $\frac{\sqrt{2}}{4}abc$; d) $\frac{1}{2}abc$. **147.** 200 dm.³. **148.** $a^2\sqrt{2c^2-b^2} = 450$ jednostek sześciennych. **149.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. *Wskazówka:* Jeżeli $\angle A_1AB = A_1AD = BAD = 60^0$,[1])

[1]) Z sześciu rombów równych zbudować można równoległościan dwoma sposobami: 1) przy dwóch wierzchołkach przeciwległych znajdują się tylko ostre kąty, przy sześciu zaś wierzchołkach pozostałych znajdują się w każdym po dwa kąty rozwarte i po jednym ostrym; 2) przy dwóch wierzchołkach przeciwległych znajdują się jedynie kąty rozwarte, przy sześciu zaś pozostałych znajdują się w każdym po dwa kąty ostre i po jednym rozwartym. Drugi sposób możliwy jest tylko w tym wypadku, jeśli kąt rozwarty rombu jest mniejszy od 120° (czyli kąt ostry w rombie jest większy od 60°).

to wierzchołek A_1 jest jednakowo oddalony od punktów A, B i D. **150.** $\frac{abc}{2}\sqrt{2}$; $(a+b)c\sqrt{3}$; 45°. *Wskazówka:* Jeśli AA_1 jest krawędzią boczną i $\angle A_1AB = \angle A_1AD = 60^0$, to prowadzimy $A_1O \perp ABCD$ i $A_1E \perp AD$ i łączymy E z punktem O. **151.** $\frac{a^3}{2}$. **152.** $\frac{P.Q}{2a}$. **153.** 2 dm. **154.** a) 45 c.³; b) 100 m.³. **155.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{8}$; $\frac{a^2}{2}(2+\sqrt{2})$. **156.** $\frac{ac}{8}\sqrt{12a^2-3c^2}$. **157.** a) 3060 m.³; b) 1 st.³. **158.** 2 m.³. **159.** a) 9 cm.; b) 7 c. **160.** a) $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}$; b) $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{2}}$; c) $\sqrt{b^2-a^2}$. **161.** a) $\frac{1}{2}\sqrt{4h^2+\frac{a^2}{3}}$; b) $\frac{1}{2}\sqrt{4h^2+a^2}$; c) $\frac{1}{2}\sqrt{4h^2+3a^2}$. **162.** 5 dm. i 6 dm. **163.** 12 cm. **164.** 3 c. **166.** $\frac{180^0}{n}$. **167.** 14 c². **168.** ah; $\frac{a}{4}\sqrt{12h^2+3a^2}$. **169.** $\frac{a}{4}\sqrt{3b^2-a^2}$. **170.** $a_1 = m+n$ i $h_1 = \frac{1}{2}(m-n)$; $m=\sqrt{g^2+Q\sqrt{2}}$ i $n=\sqrt{g^2-Q\sqrt{2}}$; $a_2 = m-n$ i $h_2=\frac{1}{2}(m+n)$. W przykładzie: $a_1=8$, $a_2=6$, $h_1=3$ i $h_2=4$. **171.** a) $\frac{400}{4^2}=25$; $25.2^2=100$; $25.3^2=225$; b) 16; 64; 144; 256. **172.** 245 st.². **173.** a) 11 m.; b) 35 c. **174.** $\frac{ab\sqrt{2}}{4}$. **175.** $\frac{ab}{4}$. **176.** $\frac{3a^2h}{4\sqrt{a^2+3h^2}}$. **177.** $3\frac{1}{5}$ st.². **178.** $\frac{ah}{a+h}$. **179.** $a(\sqrt{6}-2)$. **180.** $a(2-\sqrt{2})$. **181.** a) $\frac{3}{4}a\sqrt{4h^2+\frac{a^2}{3}+\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}$; b) $a\sqrt{4h^2+a^2}+a^2$; c) $\frac{3}{2}a\sqrt{4h^2+2a^2}+\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. **182.** 2 st.². **183.** $2k\sqrt{3}(g+k)$. **184.** $\frac{a}{2}$. **185.** 1,8 m. i 4 m. **186.** a) $2a^2$; b) $\frac{a^2}{2}$; $3a^2$. **187.** $\frac{a^2}{4}\sqrt{15}$. **188.** $3a^2$. **189.** $\sqrt{-2h^2+\sqrt{4h^4+P^2}}$. **190.** 1) a) 16 c. i 6 c. lub też 12 c. i 8 c.; b) 14 m. i 24 m. 2) $\sqrt{b^2+2Q}-\sqrt{b^2-2Q}$. *Wskazówka:* Przy analizie wzorów dla boku podstawy należy brać pod uwagę

wielkość kąta, utworzonego przez przyległe krawędzie boczne. **191.** $\sqrt{2} = 1{,}4$ c. **192.** $3a^2$. **193.** $5r^2$. **194.** $\frac{3}{2}a^2$. **195.** 3,75 st.². **196.** $3\frac{1}{9}$ st.². **197.** 6 dm.². **198.** 10 m.². **199.** $\frac{a^2}{2}(6+\sqrt{7})$. **200.** 50 m.². **201.** $5\frac{1}{3}$ st.². **202.** $22+\sqrt{136}=33{\cdot}7$ dm.². **203.** $\frac{a}{4}(\sqrt{3}+\sqrt{15})$. **204.** a) $\frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2-a^2}$; b) $\frac{a^2}{6}\sqrt{4b^2-2a^2}$; c) $\frac{a^2}{2}\sqrt{3(b^2-a^2)}$. **205.** a) $(g^2-h^2)h\sqrt{3}$; b) $\frac{1}{6}\sqrt{Q(P^2-Q^2)}=12$ jedn. sześc. **206.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$. **207.** $a^2\sqrt{3}$; $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **208.** $2a^2\sqrt{3}$; $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **209.** a) 6 : 1; b) 9 : 2. **210.** a) $\frac{a^2}{12}$; b) $\frac{h^3\sqrt{3}}{3}$. **211.** a) $\frac{3a^3}{4}$; b) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}V}$; 60°; c) $\frac{3b^3\sqrt{3}}{16}$. **212.** $\frac{1}{2}\sqrt[3]{3V}$. **213.** r^3. **214** $\frac{5}{6}a^3$; $a^2(3+\sqrt{3})$. **215.** 120 cm.³. *Wskazówka:* Oznaczając wysokości ścian bocznych przez x i y, mamy: $15x+6y=126$ i $x^2+\frac{225}{4}=y^2+9$. **216.** a) 48 dm.³; b) 240 dm.³. **217.** a) 1800 m.³; b) 16 c.³. **218.** 400 c.³; $1\frac{1}{4}$ st.². **219.** a) 1120 cm.³; b) 200 m³. **220.** 80 cm.³. **221.** $\frac{Q\sqrt{Q}}{3\sqrt[4]{3}}$. **222.** a) $\frac{1}{3}$ st.³. *Wskazówka:* Połączyć środek nierównego boku podstawy z końcami nierównej krawędzi bocznej; b) 24 c.³. **223.** 5280 m.³. **224.** $\frac{7}{3}a^3(\sqrt{2}-1)$. **225.** a) $\frac{b^3}{3}(\sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{2})$; $2b^2$; b) $\frac{b^3}{6}(2-\sqrt{3})\sqrt[4]{12}$; $b^2(3-\sqrt{3})$. **226.** $\frac{5}{12}a^3\sqrt{5+2\sqrt{5}}$; $\frac{5a^2}{2}(\sqrt{5}+1)$. **227.** 429 dm.³. **228.** 60 cm.². **229.** 18 cm.². **230.** a) $\frac{1}{8}$; b) $\frac{h}{\sqrt[3]{2}}=0{,}8h$. **231.** a) 1 : 7 : 19 : 37 : 61; b) $1:(\sqrt[3]{2}-1):(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})=50:13:9$ (z przybl.). **232.** 27 : 98. **233.** 1 : 9; 1 : 27. **234.** $x=\frac{H}{4}(\sqrt{5}-1)$, to zaś jest większą częścią odcinka $\frac{H}{2}$, podzielonego w stosunku

złotym. *Wskazówka:* Oznaczając objętość ostrosłupa przez V i *połowę* jego wysokości przez h, mamy: $V.\frac{(x+h)^3}{8h^3} - V.\ \frac{x^3}{8h^3} = \frac{1}{2}V$.
235. $\sqrt{c^2-\frac{1}{3}(a-b)^2}$; $\sqrt{c^2-\frac{1}{2}(a-b)^2}$; $\sqrt{c^2-(a-b)^2}$. **236.** 56 c. i 24 c. **237.** 6 dm. **238.** 10 cm. i 2 cm. **239.** $1\frac{8}{9}$ cm.; $6\frac{2}{9}$ cm.; $5\frac{1}{7}$ cm. **240.** $\frac{3gm}{m-n}$ i $\frac{3gn}{m-n}$. **241.** $\frac{B-b}{2}$. **242.** $\frac{a^2-b^2}{4}$. **243.** 24 m.²; 30°. **244.** 14 c.². **245.** 39 st. i 51 st. **246.** *Wskazówka:* Niech k, l i m będą odpowiedniemi bokami dwóch podstaw i przecięcia środkowego; wtedy $B : M : b = k^2 : m.^2 : l^2$; stąd $k : m : l = \sqrt{B} : \sqrt{M} : \sqrt{b}$; następnie korzystamy z tego, że $m = \frac{k+l}{2}$. **247.** $31\frac{1}{4}$ cm.². *Wskazówka:* *Sposób pierwszy:* korzystamy z wzoru dla zadania Nr. 246. *Sposób drugi:* jeżeli M jest płaszczyzną poszukiwaną, x wysokością ostrosłupa dopełniającego i y wysokością ostrosłupa ściętego, to $\frac{M}{20} = \frac{(x+y)^2}{x^2}$ i $\frac{45}{20} = \frac{(x+2y)^2}{x^2}$; z drugiego równania otrzymamy: $\frac{x+2y}{x} = \frac{3}{2}$ i t. d. **248.** a) 32 m.²; b) odległość od podstawy górnej $= \frac{2}{3}h$; h jest wysokością ostrosłupa ściętego. **249.** $h.\frac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{B}+\sqrt[4]{b}}$.
250. 50 st.². *Wskazówka:* Oznaczając przez Q poszukiwane pole, przez $2x$ i $3x$ odcinki wysokości ostrosłupa ściętego i przez y wysokość ostrosłupa dopełniającego, otrzymamy: $\frac{Q}{18} = \frac{(y+2x)^2}{y^2}$ i $\frac{18}{128} = \frac{y^2}{(y+5x)^2}$. **251.** $\sqrt{x} = \frac{1}{3}(2\sqrt{b}+\sqrt{B})$; $\sqrt{y} = \frac{1}{3}(2\sqrt{B}+\sqrt{b})$; w przykładzie $x = 8$, $y = 18$. *Wskazówka:* Korzystając z zadania Nr. 246, otrzymamy: $\sqrt{x} = \frac{1}{2}(\sqrt{b}+\sqrt{y})$ i $\sqrt{y} = \frac{1}{2}(\sqrt{x}+\sqrt{B})$.
252. a) $\frac{a+b}{4}\sqrt{36h^2+3(a-b)^2} + \sqrt{\frac{3}{4}}(a^2+b^2)$;
b) $(a+b)\sqrt{4h^2+(a-b)^2}+a^2+b^2$; c) $\frac{3}{2}(a+b)\sqrt{4h^2+3(a-b)^2} + \frac{3}{2}(a^2+b^2)\sqrt{3}$. **253.** $\frac{ab}{a+b}$. **254.** a) 20 c. i 10 c.; b) 2 wersz.

i 12 werszków. **255.** $\sqrt{3a^2-\frac{4S}{\sqrt{3}}}$. **256.** $\sqrt{\frac{2}{4}\sqrt{P^2-(B-b)^2}}$.
257. $\frac{a+b}{4}[4c+\sqrt{4c^2+3(a-b)^2}] = 16$ jednostkom kwadratowym.
258. $13\frac{1}{3}$ st.². **259.** $h = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a(2b^2-a^2)}{2b+a}}$; $h = \sqrt{0{,}2} = 0{,}45$. (Warunek możliwości: $a < b\sqrt{2}$). **260.** 5 : 9. **261.** $\frac{B\sqrt{B}.h}{3(\sqrt{B}-\sqrt{b})}$ $\frac{b\sqrt{b}.h}{3(\sqrt{B}-\sqrt{b})}$.
262. $\frac{V.B\sqrt{B}}{B\sqrt{B}-b\sqrt{b}}$. **263.** 2325 m.³. **264.** a) 5 c.; $7-\sqrt{10} = 3{,}8$ m.; b) 20 m.² i 45 m.²; c) 5 dm. **265.** a) 8 m.²; b) 2 c.² i 8 c.². **266.** 50 m.² i 128 m.². **267.** 1900 cm.³. **268.** a) $\frac{1}{12}(a^2+ab+b^2)\sqrt{3l^2-(a-b)^2}$; b) $\frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)\sqrt{l^2-\frac{1}{2}(a-b)^2}$; c) $\frac{\sqrt{3}}{2}(a^2+ab+b^2)\sqrt{l^2-(a-b)^2}$. **269.** a) $10\frac{1}{2}$ m.²; b) 1900 st.³.
270. 109 cm.³. **271.** $\frac{a^3-b^3}{2}$. **272.** R^3-r^3. **273.** Część środkowa $= 28$ c.³; część boczna $= 12$ c.³. **274.** 3 : 4. **275.** abh. **276.** $\frac{2}{3}abh$.
277. $\frac{7n^2+4mn+m^2}{7m^2+4mn+n^2} = \frac{31}{73}$. **278.** 10 cm. *Wskazówka:* Połączyć punkty przecięć przekątnych podstawy i przekątnych przecięcia nierównoległego. **279.** $\frac{1}{2}a^2(b+c)$; $2a(b+c)$. **280.** 1900 c.³; $7\frac{1}{2}$ st.². **281.** 600 c.³; $3\frac{1}{2}$ st.². **282.** 100 cm.³. **283.** 1485 m.³. **284.** b) 2 st.³. **285.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{12}(l+m+n)$; $a(l+m+n)$. **286.** $\frac{2b^2+ab}{2a^2+ab}$. **287.** 3 : 5.
288. a) 132 cm.²; b) 4 c. i 14 c. **289.** a) 235,5 m.³; b) 20 c. i 16 c.; mniejsza. **290.** a) π; b) $h = R$. **291.** $\frac{P.c}{4\pi}$. **292.** $\frac{3}{2}P = 75$ c.²; $\frac{P}{4}\sqrt{\frac{P}{\pi}} = 50$ c.³. **293.** a) 6 cm.; b) $H = R$. **294.** $H = 2R$ (walec równoboczny). **295.** $\pi M + 2Q$; $\frac{M}{2}\sqrt{\pi Q}$.
296. $V = \frac{P}{8}\left(\sqrt{l^2+\frac{2P}{\pi}} \pm \sqrt{l^2-\frac{2P}{\pi}}\right)$. W przykładzie $V = 396$ lub $115\frac{1}{2}$ jednostkom sześc. *Wskazówka:* $V = \pi RH.R = \frac{P}{2}.R$;

by wyznaczyć R, korzystamy z układu równań: $2\pi RH = P$ i $4R^2 + H^2 = l^2$, z którego otrzymamy: $(2R+H)^2 = \ldots$ i $(2R-H)^2 = \ldots$ i t. d. **297.** a) $H = 2R(2 \pm \sqrt{3})$; b) $H = 2R(2+\sqrt{5})$. **298.** a) $\frac{a^3}{4\pi}$; b) $\frac{3H^3}{4\pi}$. **299.** $40\sqrt{3} = 69{,}3$ cm.^{2}. **300.** $\frac{R^3}{2}(\pi-2)$; $\frac{R^2}{2}(3\pi - 2 + 4\sqrt{2})$. **301.** Odległość pomiędzy płaszczyzną sieczną i podstawą $= \frac{1}{2}(H \pm \sqrt{H^2 - R^2})$; powinno być $H \geqq R$. **302.** $V_a : V_b = b : a$ i $S_a : S_b = b : a$ (objętości i powierzchnie są odwrotnie proporcjonalne do osi). **304.** $\frac{\sqrt{V^2+F^2}}{\sqrt[3]{\pi V . F}}$. **305.** $\pi a^2(\sqrt{2}+1)$; $\frac{\pi a^3}{2}$. **306.** $\frac{3\pi a^3}{4}$. **307.** $2\pi Q$. **308.** $2\pi a^2$; $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{2}$. [Walec równoboczny]. **311.** $2\pi(2R-c)(a+c)$; $\pi(2R-c)ac$. **312.** $\frac{1}{2}$ c. **314.** a) 1885,2 c.^{2}; b) 7 cm. lub 3 cm.; c) $\sqrt{\frac{S(m-n)}{\pi n}}$. **315.** a) 308 cm.^{3}; b) $\frac{c^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2 l^2 - c^2}$. **316.** a) $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{Q}{\pi}(P^2 - Q^2)}$; b) 200π m.^{2}. **317.** a) 240π dm.^{2}; b) $186{,}72\pi$ m.^{2}. **318.** Podstawa 8 c., każdy z boków równych 11 c. **319.** 24π cm.^{3}. **320.** a) $\frac{\pi l^3}{8}$; b) $\frac{\pi l^3\sqrt{5}}{24}$. **322.** a) $1:2:3$; b) $\frac{\pi H^3}{9}$; πH^2; c) $2:3$. **323.** a) $\sqrt{2} : \sqrt{3}$; b) $\sqrt[3]{3} : \sqrt[3]{2}$. **324.** Promień podstawy równa się większej części tworzącej, podzielonej w stosunku średnim i skrajnym. **325.** a) Tworząca stożka równa się średnicy podstawy; b) Promień podstawy równa się większej części tworzącej, podzielonej w stosunku średnim i skrajnym. **326.** a) $\frac{3V}{\pi R}$; b) $\frac{M}{3}\sqrt{\pi Q}$; $\sqrt{Q^2 + \pi^2 M^2}$. **327.** $\frac{2\pi^2 R^3}{3(\pi^2-1)}$. **328.** $\frac{\pi M}{6}(\sqrt{l^2+2M} \pm \sqrt{l^2-2M})$. *Wskazówka:* Wiedząc, że $V = \frac{\pi}{3} M . R$, wyznaczamy R z układu równań: $R^2 + H^2 = l^2$ i $R . H = M$. (Porównaj Nr. 296). **329.** a) $\pi R^2 . \frac{m^2}{(m+n)^2}$; b) $25:36$. **330.** $\frac{l^2}{\sqrt{R^2+l^2}}$. W przykładzie $x = \frac{4}{5} l$. *Wskazówka:* Jeżeli odcinek żądany $= x$, to pole przecięcia $= \pi R^2 . \frac{x^2}{l^2}$, część górna powierzchni bocznej $= \pi Rl . \frac{x^2}{l^2}$, część dolna $= \pi Rl . \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)$ **331.** $\frac{R^2\sqrt{3}}{2}$. **332.** a) $360^0 . \frac{R}{l}$. Jeżeli stożek jest równoboczny, to jego powierzchnia boczna, rozwinięta na płaszczyźnie, jest półkolem; b) 255^0; 312^0. **333.** a) 25 c.^{2}; b) 11 c.^{2}; c) $\frac{\pi M\sqrt{15}}{3}$. **334.** a) $3136\pi c^3$. *Wskazówka:* Jeżeli kąt rozwiniętej na płaszczyźnie powierzchni $= n^0$, to $R : l = n : 360$; b) $\sqrt[3]{72\pi V^2}$. **335.** $\frac{1}{5} l$ i $\frac{4}{5} l$. **336.** a) $\frac{R}{\sqrt{2}} = 0{,}7\,R$; b) $\frac{R}{\sqrt[3]{2}} = 0{,}8\,R$. **337.** $\frac{\pi a^3}{36}\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\frac{\pi a^2}{4}$. **338.** $\pi : \sqrt{7}$. **339.** $\pi R : p$. **340.** 20 c. **341.** $\frac{H}{2} \pm \sqrt{\frac{H^2}{4} - \frac{lH}{2n}}$; $(\frac{3}{4}H$ i $\frac{1}{4}H)$. **343.** $\frac{HR\sqrt{2}}{H+R\sqrt{2}}$. **344.** $x = \frac{HR\sqrt{3}}{H+R\sqrt{3}}$. (Jeżeli stożek jest równoboczny, to $x = \frac{H}{2}$). **345.** $\frac{\pi a^2 b^2}{3\sqrt{a^2+b^2}}$; $\frac{\pi ab(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **346.** a) 4800π cm.^{3}; 1320π cm.^{2}; b) $\frac{\pi a^3}{4}$; $\frac{\pi a^2}{2}(3+\sqrt{3})$. **347.** a) 448π cm.^{3}; 216π cm.^{2}; b) 800π cm.^{3}; 1080π cm.^{2}. **348.** 240π c.^{3}; $84\pi\sqrt{3}$ c.^{2}. **349.** $\frac{\pi a^3}{2}$; $\frac{\pi a^2}{2}(3+\sqrt{3})$. **350.** *Wskazówka:* Jeżeli trójkąt się obraca dokoła boku a, to $V_a = \frac{4}{3}\pi\frac{Q^2}{a}$, Q jest polem trójkąta. Z tego wynika, że: $V_a : V_b : V_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$. **351.** a) 1021,15 c.^{2}; b) 15 m.; c) 28 dm. i 12 dm. **352.** a) 8 cm.; b) 2 m.; $5\frac{1}{2}$ m.; $12\frac{1}{2}$ m.; c) 7 c. **353.** a) 7 dm.; b) 5 cm.; c) 5 cm.; 9 cm. **354.** a) $R = 4r$; b) $r =$ większej części promienia R, podzielonego w stosunku średnim i skrajnym. **355.** $\frac{P . R^2}{R^2 - r^2}$. **356.** $\frac{2V}{h} + \frac{\pi}{3}(l^2 - h^2)$. **357.** 10 c. i 16 c. **358.** $\frac{2Rr}{R+r}$. **359.** a) 457π c.^{3}; 156π c.^{2};

b) $\frac{7}{24}\pi R^3\sqrt{3}$; $\frac{11}{4}\pi R^2$. **360.** a) $\frac{\pi}{3}(R^3-r^3)$; $\pi(R^2-r^2)\sqrt{2}$; b) $2(Q-q)$; c) $2\pi R^2$. **361.** a) $\frac{Ph}{\pi l}$; b) $\frac{1}{\pi}\sqrt{P^2-(Q-q)^2}$. **362.** $\frac{\pi^2}{3}(R^3-r^3)$. **363.** $2\pi F$. **364.** 16π; w odległości $\frac{2}{3}h$ od podstawy górnej. **365.** 10 dm. i 20 dm. **366.** 3020π c.^{3}; 476π c.^{2}. **367.** 14 cali, 13 cali, $\sqrt{250}=15{,}8$ c. **368.** 4 cm. **369.** a) 218π c.^{3}; 386π c.^{3}. 602π c.^{3}. **370.** $360^0 . \frac{R-r}{l}$. **371.** $1+\sqrt{6}=3{,}45$ dm. **372.** 5 cm., 6 dm. **373.** $\frac{7r^2+4Rr+R^2}{7R^2+4Rr+r^2}$. **374.** $\frac{R^3-r^3}{R^3}$. **375.** $\rho=\sqrt[3]{\frac{R^3+r^3}{2}}$; $x=h . \frac{\rho-r}{R-r}$. W przekładzie: $\rho=\sqrt[3]{728}=9$ (prawie); $x=\frac{2}{3}h$ (prawie).
Wskazówka: objętości V_1, V_2 i V_3 od wierzchołka całego stożka do jego podstawy i dwóch przecięć równoległych mają się do siebie, jak $R^3:\rho^3:r^3$; wskutek tego, że w tekście zadania dane jest, iż $V_1-V_2=V_2-V_3$, skąd wynika, że $R^3-\rho^3=\rho^3-r^3$. **376.** $\frac{2}{3}\pi Rrh$. **378.** $\pi a^3\sqrt{2}$; $4\pi a^2\sqrt{2}$. **379.** 1) $3\pi a^3$; $12\pi a^2$; 2) 4 : 5. **380.** 1) 1 : 2 : 3. **381.** $\frac{\pi a^3}{2}$; $2\pi a^2\sqrt{3}$. **382.** $\frac{3\pi a^3\sqrt{3}}{4}$; $9\pi a^2$. **383.** $\frac{5\pi a^3}{4}$; $5\pi a^2\sqrt{3}$. **384.** $\frac{\pi a^3}{6}(3+2\sqrt{3})$; $\pi a^2(3+\sqrt{3})$. **385.** 1) πa^3; $2\pi a^2\sqrt{3}$; 2) $\frac{7\pi a^3\sqrt{3}}{12}$; $\frac{7\pi a^2}{2}$. **386.** $\frac{9\pi a^3}{2}$; $6\pi a^2\sqrt{3}$. **387.** $3\pi a^3\sqrt{3}$; $12\pi a^2$. **388.** $9\pi a^3$; $12\pi a^2\sqrt{3}$. **389.** 280π c.^{3}; 270π c.^{2}. **390.** 3400π c.^{3}; 10π st.^{2}. **391.** 504π cm.^{3}: 504 cm.^{2}. **392.** $60\pi\sqrt{3}$ dm.^{3}; 120π dm.^{2}. **394.** Objętości równe; 2) 1 : 3. **396.** $4\pi Q$. **397.** 1) $\frac{3}{4}\pi a^3\sqrt{3}$; $6\pi a^2$. 2) $\frac{\pi a^3}{2}(\sqrt{2}+1)$; $2\pi a^2(2+\sqrt{2})$. **398.** 1) $\frac{2\pi a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\frac{4\pi ab(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$. 2) $\pi ab\sqrt{a^2+b^2}$; $2\pi(a+b)\sqrt{a^2+b^2}$. **399.** $\frac{\pi a^3}{6}(5+3\sqrt{2})$; $3\pi a^2(1+\sqrt{2})$. **400.** $\frac{\pi R^3}{24}(7+2\sqrt{3})$; $\frac{\pi R^2}{4}(7+\sqrt{6}+\sqrt{2})$. **401.** $\frac{\pi R^3}{6}$; $\frac{\pi R^2\sqrt{6}}{2}$. **402.** $\frac{\pi R^3\sqrt{3}}{3}$; $\pi R^2(3+\sqrt{3})$. **403.** $\frac{\pi R^3\sqrt{2}}{6}$. **404.** $\frac{\pi R^3}{12}(3+\sqrt{3})$.

405. $\frac{3}{4}\pi R^3$; $3\pi R^2$. **406.** 1) 16π m.^{2}; 2) 3 : 4. **407.** 2 c. **408.** 4,8 cm. **411.** 1) $\pi R\sqrt{3}$. 2) 4π m. **412.** 1) 314,16 c.^{2}; 523,6 c.^{3}. 2) $562{,}5\pi$ st.^{3}. 3) $\sqrt[3]{36\pi V^2}$. **413.** 1) 6 c. 2) $\sqrt{50}=7{,}07$ c. **414.** Zwiększają się odpowiednio: 16 razy i 64 razy; 25 razy i 125 razy. 2) $\sqrt{m^3}:\sqrt{n^3}$. 3) $\sqrt[3]{m^2}:\sqrt[3]{n^2}$. **416.** Powierzchnia największa równoważna jest sumie 2 powierzchni pozostałych. **417.** 25π m.^{2}. **418.** 10 c. i 7 c. **420.** $S_m:S_n=\sqrt[3]{18}:3=7:8$. **422.** $R\sqrt[3]{\frac{3\pi+1}{2\pi}}$. **426.** 400π c.^{2} albo 1100π c.^{2}. **427.** $R(\sqrt{3}-1)$. **428.** 1) 910π cm.^{2}. 2) $\pi\sqrt{(r^2-r_1^2+h^2)^2+4r_1^2h^2}$. **429.** $2R\frac{m-1}{m}$. ($\frac{3}{2}R$). **431.** $\pi(r^2+h^2)$. **432.** $\frac{21\pi Q}{4\pi-3\sqrt{3}}$. **434.** $(n^2-1):n^2$. **435.** 1) 180π cm.^{2}. 2) $3R$. **436.** 112500π c.^{3}. **437.** $\frac{M}{6}\sqrt{\frac{M^2+4N^2}{\pi M}}$. **438.** $2Q(4-\sqrt{2})$. **439.** $\frac{\pi R^2}{2}(5-2\sqrt{3})$; $\frac{\pi R^3}{3}(2-\sqrt{3})$. **441.** $\frac{1}{5}$. **442.** $\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$, jest to większa część R, podzielonego w stosunku średnim i skrajnym. **443.** $\sqrt[3]{\frac{1}{4}lh(l+h)}$. **444.** 34182π cm.^{3}. **445.** 14094π c.^{3}. **446.** 1) 78π dm.^{3}. 2) 0,028. **447.** $\frac{13}{24}$. **448.** 7 : 20. *Wskazówka:* Przeprowadzona płaszczyzna dzieli prostopadłą do niej średnicę kuli w stosunku 1 : 2 **449.** 5 : 16. **450.** $\frac{340}{3}\pi$ c.^{3}; 172π c.^{2}. **451.** 3528π cm.^{3}. **452.** $\frac{n-m}{n}.R$. **453.** Tworząca $=R\sqrt[3]{4}=1{,}6R$; promień $=\frac{R}{2}\sqrt{4-\sqrt[3]{16}}=0{,}6R$. **454.** $\frac{R}{3}$. **455.** $\frac{7}{12}\pi R^3$; $\frac{5}{2}\pi R^2$. **456.** $\frac{\pi R^3}{6}(3\sqrt{2}-4)$; $\frac{\pi R^2}{2}(4-\sqrt{2})$. **457.** $\frac{R}{3}$. **459.** $\frac{\pi R^2}{2}(\sqrt{6}+2\sqrt{2})$; $\frac{\pi R^3\sqrt{2}}{12}$. **461.** $2\pi R^2(1+\sqrt{2})$; $\frac{5}{6}\pi R^3\sqrt{2}$. **462.** 1) $\frac{1}{3}\pi R^3\sqrt{3}$; $\frac{3\pi R^2}{2}(2\sqrt{3}+1)$. 2) $\frac{\pi R^2}{3}(2-\sqrt{2})$; $\frac{\pi R^2}{2}(4+3\sqrt{2})$. **464.** 1 : 2 : 3. **465.** $4:3\pi$. **467.** $3ab$; $\frac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}$.

468. $64\pi : 27$. **469.** $1:5$. **470.** $9:64$. **471.** $12R^2\sqrt{3}$. **472.** $\frac{3}{2}R^3$. **473.** $a(1+\sqrt{3})$. **474.** $8\frac{1}{8}$ dm. **475.** 1) $\frac{a}{4}\sqrt{6}$; $\frac{a}{12}\sqrt{6}$; 2) $1:3:9$. **476.** $\frac{a}{2}\sqrt{2}$; $\frac{a}{6}\sqrt{6}$. **477.** 1) $\frac{h}{3}$. 2) $h(\sqrt{2}-1)$. **478.** 8,1 cm. **479.** $56R^2$. **480.** $\frac{21}{16}R^3$. **481.** $1:2:3$. **482.** 3 razy. **483.** *Wskazówka:* a) Jeżeli mamy opisane stożek i walec, to $S_m : S_n : S_k = 4:6:9$ i $V_m : V_n : V_k = 4:6:9$; b) Jeżeli mamy wpisane stożek i walec, w takim razie $S_m : S_n : S_k = 16:12:9$ i $V_m : V_n : V_k = 32:12\sqrt{2}:9$. **484.** $\frac{2Sm(m+n)}{4m^2+n^2}$. **485.** a; $7:16$. **486.** 4 razy. **487.** $\frac{(\pi h^2+r^2)^2}{h^2}$. **488.** $2\pi r\frac{l-r}{l}$. **489.** 96π c.^{3}. **491.** $\pi r^2(7+5\sqrt{2})$. **492.** 0,366; $0{,}41+\sqrt{0{,}081}=0{,}69$. **494.** 169π cm.^{2}; 532π cm.^{3}. **495.** $\frac{R}{m}$. **496.** $\frac{4R}{m+1}$; $(\frac{4}{3}R)$. **497.** $R(\sqrt{5}-1)$, jest to większa część średnicy, podzielonej w stosunku średnim i skrajnym. **498.** $\frac{6R}{m+2}$; $(\frac{3}{2}R)$. **499.** $\frac{1+\sqrt{17}}{4}R = 1{,}28\,R$. **500.** $R\sqrt{0{,}6}=0{,}77\,R$. **501.** 104 cm.^{2}; 64 cm.^{3}. **502.** $\frac{8}{3}R^3$; $2:\pi$ (w przybliżeniu 7 : 11). **503.** $x=\sqrt{\frac{l(R+l)}{2}}=6$. **504.** $\frac{2}{\pi}\,\frac{m^2+mn+n^2}{mn}$. **506.** 260 cm.^{2}; 240 cm.^{3}. **507.** $9:2$. **509.** $\frac{R}{2}(\sqrt{2m+1}+\sqrt{2m-3})$ i $\frac{R}{2}(\sqrt{2m+1}-\sqrt{2m-3})$. **511.** 1) $3:5$. 2) $\frac{3}{8}$. **512.** $\frac{b^3}{6}\sqrt{2\sqrt{5}-4}$. **513.** $8:1$. **514.** 24 m.^{2}. **515.** $\frac{5}{6}\pi a^2$; $\frac{\pi a^3}{216}(18-5\sqrt{3})$. **516.** 2 części równe; $9:7$. **517.** $\frac{\pi R^3}{3}(2+\sqrt{2})$; $2\pi R^2\sqrt{2+\sqrt{2}}$. **518.** $\frac{\pi a^2}{12}(15+11\sqrt{2})$; $\frac{\pi a^3}{2}(7+4\sqrt{2})$. *Wskazówka:* Niech będzie prosta MN osią, MA połową boku i AB bokiem następnym. Prowadzimy $BB_1 \perp MN$ i $AL \perp BB_1$ i posługujemy się trójkątem ABL, aby znaleźć AL i BL zapomocą a.

519. $2\pi a^3(3+2\sqrt{2})$; $8\pi a^2(\sqrt{2}+1)$. *Wskazówka:* Jeżeli bok AB jest osią, to prowadzimy $CC_1 \perp BE$ i $DD_1 \perp BE$. (Porównaj z Nr. 518.) **520.** $\frac{a}{3}$. **521.** $\frac{4a^2\sqrt{3}}{9}$. **522.** 9 razy. **523.** $9:64$. **524.** $2\pi l^2$. **525.** 4800π c.^{3}; 960π c.^{2}. **526.** $r\sqrt{3}$ lub $r\sqrt{2}$. **527.** $\frac{2}{9}ab$. **529.** 532π c.^{3}. **530.** $\frac{a}{12}(3\sqrt{2}-\sqrt{6})$. **531.** $\frac{1}{4}\sqrt{(4a^2+c^2)(4b^2+c^2)}$. **532.** Objętość walca $\frac{\pi R^3\sqrt{2}}{2}$; objętość poza powierzchnią boczną walca $\frac{\pi R^3\sqrt{2}}{3}$; każda z objętości przy podstawach walca $\frac{\pi R^3}{12}(8-5\sqrt{2})$. **533.** 9 cm.; 10 cm. i 17 cm. mniejszy. **534.** $\frac{bh}{2}(a+b)$. **535.** $3:7$. **536.** $\frac{a}{6}\sqrt{2h^2+9a^2}$. **537.** $\frac{h^3 h_1{}^2\sqrt{3}}{9h^2-h_1{}^2}$. **538.** $\sqrt{\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}}$. **539.** $32\sqrt{2}$ cm.^{2}; $\frac{64}{3}\sqrt{2}$ cm.^{3}; 45^0. **540.** 336 cm.^{2}; $96\sqrt{7}$ cm.^{3}. **542.** $\frac{c^3}{16}$; $\frac{c^2}{4}(2+\sqrt{6})$. **543.** $\frac{256\pi}{7}$ cm.^{3}. **544.** $\frac{\pi a^3}{12}(15-8\sqrt{2})$. **545.** $4:3$. **546.** 204π cm.^{3}. **547.** $\frac{H}{2n}(\sqrt{4+n^2})$. **548.** 1) $\frac{lr}{R}$; 2) $\frac{r}{l}\sqrt{l^2-R^2}$; 3) $\frac{2\pi r^2}{l}(l-R)$. **549.** $3a^2$. **550.** 1) 7 m.; 2) $5:4$; 3) w graniastosłupie $5:4$, w ostrosłupie ściętym $5:8$. **551.** 4 razy. **552.** $\frac{\pi a^3}{6}(15+7\sqrt{5})$. *Wskazówka:* Zastosowujemy te twierdzenia, które służą do obliczenia powierzchni i objętości kuli: otrzymamy $V=\frac{4}{3}\pi\alpha^2 R$, gdzie α — apotema 10-kąta i R — promień. **553.** $\pi a^2(3\sqrt{6}+5\sqrt{2})$; $\frac{\pi a^3}{6}(11\sqrt{6}+19\sqrt{2})$. *Wskazówka:* Trzeba zastosować te twierdzenia, które służą do obliczania powierzchni i objętości kuli. **554.** $\frac{\pi a^2}{2}(15+8\sqrt{3})$; $\frac{\pi a^3}{12}(54+31\sqrt{3})$. *Wskazówka:* Patrz Nr. 553. **555.** a^3; $2a$. *Wskazówka:* Opisać na 5-kącie koło, rozpatrzyć kąty trójkątów. **556.** 864π cm.^{3}; $326\sqrt{3}\pi$ cm.^{2}. **557.** $\frac{m^2(360^2-n^2)}{n^2(360^2-m^2)}$.

558. $\frac{ab}{12}\sqrt{3b^2-a^2}$. **559.** $a(\sqrt{6}-\sqrt{3})$. **560.** 4 : 21; 1 : 4. **561.** $r(1+\sqrt{1{,}5})$. **562.** 11; 60°. **563.** 27 : 26. **564.** $\frac{ab}{a+b}\sqrt{2h^2+(a+b)^2}$. **565.** πa^2. **566.** $\frac{Q^2}{8a}$. **567.** $a(3-\sqrt{6})$. **568.** Jeżeli krawędzie boczne nie spotykają się, to $2\frac{2}{3}$ dm.³; w odwrotnym zaś wypadku $\frac{1}{4}\sqrt{239}=3{,}9$ dm.³. **569.** 5 : 2. **570.** $\frac{5\sqrt{3}-8}{8-\sqrt{3}}=\frac{2}{19}$ (w przybliżeniu). **571.** $\frac{a}{4}(3-\sqrt{3})$. **572.** $9\frac{1}{3}$ st.²; $1\frac{1}{6}$ st.³; 17 c.; $\sqrt{666}=25{,}8$ c. i $\sqrt{954}=30{,}9$ c. **573.** $\frac{a^3}{6}$. **574.** $\pi\rho^2 h-\frac{\pi h^3}{12}$. **575.** $4\pi R^2+4\pi r^2$. **576.** $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. **577.** $\frac{a^2}{4}\sqrt{3b^2-a^2}$. *Wskazówka: 1 sposób.* Niech kąty płaskie przy wierzchołku A będą ostre i niechaj punkt M będzie punktem przecięcia przekątnych rombu $ABCD$. Prowadzimy A_1B, A_1D i A_1M, wyznaczamy wysokość równoległościanu z trójkąta AA_1M (mając jego boki). *2 sposób.* Objętość ostrosłupa foremnego AA_1BD jest $\frac{1}{6}$ objętości równoległościanu. **578.** $V=\frac{a^2}{96}\sqrt{4b^2-2a^2}$. W danym przykładzie $V=\frac{1}{3}$ jednostki sześc. (Dlaczego dany trójkąt musi być ostrokątnym?) *Wskazówka:* Przedewszystkiem wyznaczamy V zapomocą $\frac{1}{2}$ podstawy danego trójkąta i połowy jego wysokości; te połowy oznaczamy literami. **579.** $\frac{(l-R)^3}{(l+R)^3}$. **531.** 7 : 20. *Wskazówka:* Przy obliczaniu dobrze jest przyjąć za jednostkę długości odległość pomiędzy środkiem kuli a ścianą czworościanu. **582.** $\frac{5}{8}a^3$. *Wskazówka:* Na podstawie opisujemy koło; dowiemy się (zapomocą kątów), że mniejszy odcinek przekątnej równa się $\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$. **583.** 6 st. *Wskazówka:* Zastosowujemy dwa sposoby wyznaczania objętości. **584.** $CD=23{,}4$. *Wskazówka:* Dowieść, że CD i AB przecinają się, i zastosować twierdzenie Ptolemeusza. **585.** a^3. **586.** $R(\sqrt{5}-1)$ i $R(3-\sqrt{5})$; są to odcinki większy i mniejszy średnicy, podzielonej w stosunku

średnim i skrajnym. **587.** $\frac{a^3}{12}$. **588.** 22 m. **589.** $\frac{a^2}{2ab+b^2}$. **590.** W stosunku średnim i skrajnym. *Wskazówka:* Niech będzie: x — stosunek górnego odcinka krawędzi bocznej do całej krawędzi, a — przyjęty bok równoległoboku, h — odległość pomiędzy tym bokiem i bokiem przeciwległym i H — wysokość ostrosłupa. W takim razie, wyznaczając objętość dolnej części (jako objętość graniastosłupa ściętego na wzór Nr. 284), otrzymujemy równanie $\frac{h.H(1-x)}{2}\cdot\frac{2a+ax}{3}=\frac{ahH}{6}$, skąd $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **591.** $\frac{R}{2}(\sqrt{3}-1)$. *Wskazówka:* Środek kuli wpisanej znajduje się na prostej, przeprowadzonej z wierzchołka kąta trójściennego przez środek trójkąta, który łączy końce jego krawędzi. **592.** $\frac{(\sqrt{B}+\sqrt{b})^3-8b\sqrt{b}}{8B\sqrt{B}-(\sqrt{B}+\sqrt{b})^3}$. *Wskazówka:* Korzystamy z tego, że objętości części od wierzchołka ostrosłupa do przecięć równoległych mają się do siebie tak, jak sześciany odpowiednich boków tych przecięć, a zatem, jak sześciany pierwiastków kwadratowych z pól tych przecięć; zastosowujemy wzór z Nr. 246. **593.** *Rozwiązanie:* Niech odległość pomiędzy przecięciem a podstawą górną będzie x. Przedewszystkiem wyznaczamy liczbę proporcjonalną dla boku przecięcia. Niech ta liczba będzie k. Porównywając objętości części od wierzchołka ostrosłupa do podstawy i przecięć równoległych, dowiadujemy się, że mają się one do siebie tak, jak $m^3 : k^3 : n^3$. Z zadania mamy, że $m^3-k^3=k^3-n^3$, skąd $k=\sqrt[3]{\frac{m^2+n^3}{2}}$. Wiemy też, że w ostrosłupie boki odpowiednie przecięć równoległych mają się do siebie, jak odległości ich płaszczyzn do wierzchołka ostrosłupa; z tego powodu możemy napisać, że odległości te wynoszą $z.n$, $z.k$ i $z.m$; skąd $x=z(k-n)$, $h=z(m-n)$; a więc $x=\frac{h}{m-n}(k-n)$; $x=\frac{h}{m-n}\left(\sqrt[3]{\frac{m^3+n^3}{2}}-n\right)$.

594. 1) $\frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$; 2) $\frac{a\sqrt{3}}{12}(3+\sqrt{5})$; 3) $5a^2\sqrt{3}$; 4) $\frac{5a^3}{12}(3+\sqrt{5})$. *Wskazówka* (1): Oś 12-ścianu AM i krawędź AB są odpowiednio

średnicą i cięciwą w kole wielkiem kuli opisanej. Prowadzimy $BB_1 \perp MA$, otrzymujemy $AB^2 = AM.AB_1$, lub $a^2 = 2R.AB_1$; AB_1 możemy obliczyć zapomocą BB_1, linji, która jest promieniem 5-kąta foremn., o boku a. **595.** 1) $\frac{a}{4}(\sqrt{15}+\sqrt{3})$; 2) $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$; 3) $3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$; 4) $\frac{a^3}{4}(15+7\sqrt{5})$. *Wskazówka* (1): Z pośród 20 wierzchołków dwudziestościanu można wziąć 8 takich, które po połączeniu dają sześcian, którego krawędzią będzie przekątna pięciokąta, a przekątną sześcianu będzie średnica kuli opisanej. **596.** *Rozwiązanie:* Dla przykładu weźmy 5-kątny ostrosłup ścięty, o objętości, równej V, wysokości h i o podstawach, równych B i b. Prowadząc przez jakąkolwiek krawędź boczną płaszczyzny przekątne, otrzymamy trójkątne ostrosłupy ścięte, o wysokości h, których podstawy dolne niech będą Q, S i T, górne zaś: q, s i t. W takim razie

$$V = \frac{h}{3}(Q+q+\sqrt{Qq}+S+s+\sqrt{Ss}+T+t+\sqrt{Tt}),$$

lub

$$V = \frac{h}{3}(B+b+\sqrt{Qq}+\sqrt{Ss}=\sqrt{Tt}). \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Porównywając pola podstaw ostrosłupów ściętych i znając kwadraty ich odległości od wierzchołka ostrosłupa pełnego, dowiadujemy się, że $\frac{Q}{q} = \frac{S}{s} = \frac{T}{t} = \frac{B}{b}$; oznaczymy ten stosunek literą n i otrzymamy $Q = qn$, $S = sn$, $T = tn$, $B = bn$. W ten sposób: $\sqrt{Qq}+\sqrt{Ss}+\sqrt{Tt} = (q+s+t)\sqrt{n} = b\sqrt{n} = \sqrt{bnb} = \sqrt{Bb}$ (2). Wzór drugi podstawiamy do (1); otrzymamy taki sam wzór, jaki już był dla trójkątnego ostrosłupa ściętego.

SPIS RZECZY.

[illegible] zadania (np. 10*) oznacza, że w odpowiedzi wskazany jest sposób jego rozwiązania.